

## Mecánica de Fluidos - 2009

### Ejercicios resueltos

1. El campo de velocidades de un fluido está dado por:

$$\vec{v} = (a, b \sin(\omega t), 0)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Calcule y grafique:

- La línea de corriente que pasa por el origen, a  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ,  $t = \frac{\pi}{\omega}$  y  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ .
- La trayectoria de la partícula, que -a tiempo  $t = 0$ - estaba en el origen de coordenadas.
- La línea de humo de todas las partículas que pasaron por el origen de coordenadas, a  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ,  $t = \frac{\pi}{\omega}$  y  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ .

*Respuesta:*

- Líneas de corriente:

El campo de velocidades es uniforme (independiente de la posición), en otras palabras todos los vectores velocidad son paralelos, las líneas tangentes a un campo uniforme serán entonces rectas paralelas entre sí. A  $t = 0$ ,  $\vec{v} = (a, 0, 0)$  y la línea que pasa por el origen será el eje  $x$ . A  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ,  $\vec{v}(a, b, 0)$ , la línea que pasa por el origen es:  $y = \frac{b}{a}x$ . A  $t = \frac{\pi}{\omega}$  es nuevamente el eje  $x$ , y a  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$  será la recta  $y = -\frac{b}{a}x$ .

- Podemos calcular la función de historia cinemática integrando la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \vec{v}(\vec{\Phi}, t)$$

Particularizando para nuestro campo vectorial (uniforme, dependiente de  $t$ ):

$$\frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{x}, t)}{\partial t} = (a, b \sin(\omega t), 0)$$

En componentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} &= a \\ \frac{\partial \Phi_y}{\partial t} &= b \sin(\omega t) \\ \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando, teniendo en cuenta la condición inicial:  $\vec{\Phi}(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= x + at \\ \Phi_y &= y + \frac{b}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] \\ \Phi_z &= z \end{aligned}$$

Para la partícula que nos interesa:  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , su trayectoria se obtiene con la fórmula:

$$\vec{p}(t) = \vec{\Phi}((0, 0, 0), t) = \left( at, \frac{b}{\omega}[1 - \cos(\omega t)], 0 \right)$$

c) Líneas de humo.

Como primer paso debemos identificar las partículas que, en algún momento pasaron por el origen: evaluando la función de historia cinemática en un instante que llamaremos  $\tau$ , el resultado es el punto  $(0, 0, 0)$ :

$$\vec{\Phi}(\vec{p}, \tau) = (0, 0, 0)$$

Reemplazando la expresión obtenida arriba:

$$\begin{aligned} p_x + a\tau &= 0 \\ p_y + \frac{b}{\omega}[1 - \cos(\omega\tau)] &= 0 \\ p_z &= 0 \end{aligned}$$

despejando:

$$\begin{aligned} p_x &= -a\tau \\ p_y &= -\frac{b}{\omega}[1 - \cos(\omega\tau)] \\ p_z &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener la línea de humo debemos obtener la posición de estas partículas en el momento de interés,  $t$ :  $\vec{h} = \vec{\Phi}(\vec{p}, t)$ . Reemplazando:

$$\begin{aligned} h_x &= -a\tau + at &= a(t - \tau) \\ h_y &= -\frac{b}{\omega}[1 - \cos(\omega\tau)] + \frac{b}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] &= \frac{b}{\omega}[\cos(\omega\tau) - \cos(\omega t)] \\ p_z &= 0 &= 0 \end{aligned}$$

Las líneas de humo requeridas se obtienen reemplazando  $t$  por los instantes definidos:

▪  $t = 0$ :

$$\vec{h}(\tau) = (-a\tau, \frac{b}{\omega}[\cos(\omega\tau) - 1], 0)$$

▪  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ :

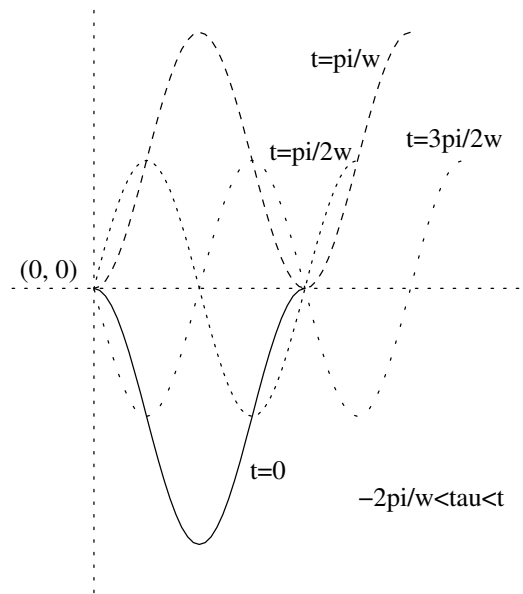
$$\vec{h}(\tau) = (a(\frac{\pi}{2\omega} - \tau), \frac{b}{\omega} \cos(\omega\tau), 0)$$

▪  $t = \frac{\pi}{\omega}$ :

$$\vec{h}(\tau) = (a(\frac{\pi}{\omega} - \tau), \frac{b}{\omega}[\cos(\omega\tau) + 1], 0)$$

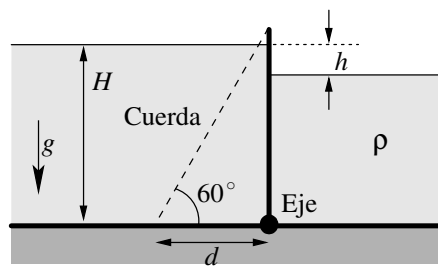
▪  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ :

$$\vec{h}(\tau) = (a(\frac{3\pi}{2\omega} - \tau), \frac{b}{\omega} \cos(\omega\tau), 0)$$



2. En la figura se muestra una compuerta vertical que separa dos grandes piletas de agua. La compuerta, que tiene 5 metros de ancho, está articulada en el borde inferior, y se mantiene en su posición mediante una cuerda que conecta su borde superior con el fondo. Calcule la tensión que soporta la cuerda si:

- $H = 2\text{m}$ . (Profundidad de la parte más honda).
- $h = 10\text{cm}$ . (Desnivel entre las piletas).
- $d = 1.27\text{m}$ . (Distancia desde el eje de la compuerta y el punto de fijación de la cuerda).



*Respuesta:*

La tensión del fluido, en condición hidrostática es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Si ubicamos el eje  $x$  normal a la compuerta, el  $y$  normal al plano del dibujo y el eje  $z$  vertical, la fuerza por unidad de superficie, sobre el lado izquierdo será:

$$f_i = \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sobre el lado derecho la normal es la opuesta, por lo tanto la fuerza por unidad de superficie es:

$$f_d = -p$$

El momento total de las fuerzas de presión aplicadas sobre el lado izquierdo se calcula como:

$$M_i = \int \int f_i \times \vec{r} \, dy \, dz = \int \int \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \, dy \, dz = \int \int -pz \, dy \, dz$$

Análogamente, el momento total de las fuerzas de presión aplicadas sobre el lado derecho es:

$$M_d = \int \int pz \, dy \, dz$$

Teniendo en cuenta que la presión a la izquierda está dada por:

$$p_i = p_a + \rho g(H - z)$$

y a la derecha:

$$\begin{cases} p_a + \rho g(H - h - z) & \text{si } z < H - h \\ p_a & \text{si } z > H - h \end{cases}$$

En el momento total se anulan todos los términos conteniendo la presión atmosférica, y resulta:

$$\begin{aligned} M &= w\rho g \left[ \int_0^H (H - z)z \, dz - \int_0^{H-h} (H - h - z)z \, dz \right] \\ &= w\rho g \left[ \frac{H^3}{6} - \frac{(H - h)^3}{6} \right] = \frac{w\rho gh}{2} \left( H^2 - hH + \frac{h^2}{3} \right) \\ &= \frac{5 \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 0.1}{2} \left( 4 - 2 \cdot 0.1 + \frac{0.1^2}{3} \right) Nm = 9318 Nm \end{aligned}$$

Para equilibrar este momento, la cuerda debe estar tensionada:

$$Td \sin(60^\circ) = M \Rightarrow T = \frac{9318 Nm}{1.27m \sqrt{3}/2} = 8472 N$$

3. Entre dos cilindros concéntricos girando a distintas velocidades se tiene un fluido newtoniano en el cual se establece el siguiente campo de velocidades:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{A}{r}, \quad v_z = 0$$

- a) ¿Cuál debería ser el campo de presiones para que se satisfagan las ecuaciones de Navier-Stokes?  
¿Cuánto vale el término correspondiente a las fuerzas viscosas?
- b) Calcule la potencia disipada en la región definida por:

$$0 < \theta < 2\pi, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < z < h$$

*Respuesta:*

- a) La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Todos los términos se anulan porque  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = \frac{A}{r}$  no es función de  $\theta$  y  $v_z = 0$ .

La ecuación de Navier-Stokes en la dirección radial es:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left( \nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right)$$

Reemplazando el campo de velocidades dato resulta:

$$-\left(\frac{A}{r}\right)^2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \implies \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho A^2}{r^3}$$

La ecuación de Navier-Stokes en la dirección angular es:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$

Reemplazando el campo de velocidades dato resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{A}{r^3} \right) \\ \nabla^2 v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{rA}{r^2} \right) = \frac{A}{r^3} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= r\mu \left( \frac{A}{r^3} - \frac{A}{r^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

La ecuación de Navier-Stokes en la dirección  $z$  es:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z$$

Reemplazando el campo de velocidades dato se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Finalmente, integrando:

$$p = p_\infty - \frac{\rho A^2}{2r^2}$$

donde  $p_\infty$  es el valor al que tiende la presión para  $r \rightarrow \infty$ .

Durante el cálculo de las ecuaciones anteriores para el campo de velocidades especificado, se comprobó que los términos viscosos en todos los casos se anulan.

- b) La potencia disipada se puede calcular de varias formas. Por ejemplo, calculemos la potencia transmitida por los esfuerzos internos al fluido hacia un cilindro:  $r < r_0, 0 < z < h$ . La tensión en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \sigma_{\theta z} &= \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} & \sigma_{zr} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando por el campo de velocidades dato se obtiene:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & -2\mu \frac{A}{r^2} & 0 \\ -2\mu \frac{A}{r^2} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

La fuerza se obtiene aplicando el tensor a la normal exterior al cilindro:

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ -2\mu \frac{A}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Particularizando para  $r = r_0$ , esta fuerza ejerce un torque por unidad de superficie:

$$T = -2\mu \frac{A}{r_0}$$

multiplicando por la velocidad angular se obtiene la potencia por unidad de superficie:

$$w = -2\mu \frac{A}{r_0} \frac{v_\theta(r_0)}{r_0} = -2\mu \frac{A^2}{r_0^3}$$

Para obtener la potencia total se integra en toda la superficie. Puesto que  $w$  es constante en la misma, simplemente se multiplica por el área:

$$W = -2\mu \frac{A^2}{r_0^3} 2\pi r_0 h = -4\pi\mu h \frac{A^2}{r_0^2}$$

La potencia disipada es la diferencia entre la potencia transmitida en  $r_1$  y la transmitida a través de  $r = r_2$ :

$$W_d = 4\pi\mu h A^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

También se puede calcular la disipación por unidad de volumen e integrar en el volumen de interés. La función disipación es:  $\Phi = \sigma : \vec{\nabla} \vec{v}$ . En cartesianas:

$$\Phi = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

En este caso:

$$u_x = - \frac{Ay}{x^2 + y^2} = \frac{-Ay}{r^2}$$

$$u_y = \frac{Ax}{x^2 + y^2} = \frac{Ax}{r^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{2Axy}{r^4} \qquad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{A}{r^2} - 2\frac{Ax^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{A}{r^2} + 2\frac{Ay^2}{r^4} \qquad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{2Axy}{r^4}$$

$$\Phi = \mu \left[ 2 \frac{4A^2 x^2 y^2}{r^8} + 2 \frac{4A^2 x^2 y^2}{r^8} + \left( -2 \frac{A(x^2 - y^2)}{r^4} \right)^2 \right]$$

$$= \mu \left( 16 \frac{A^2 x^2 y^2}{r^8} + \frac{4A^2 x^4}{r^8} + \frac{4A^2 y^4}{r^8} - 8 \frac{A^2 x^2 y^2}{r^8} \right)$$

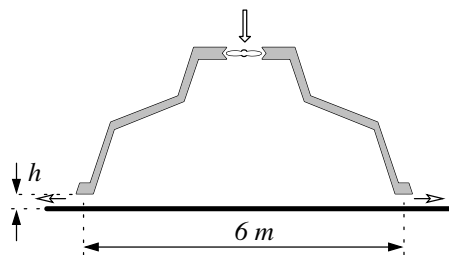
$$= \frac{4\mu A^2}{r^8} (2x^2 y^2 + x^4 + y^4) = \frac{4\mu A^2}{r^4}$$

Integrando:

$$W_d = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \Phi r \, dr \, dz \, d\theta$$

$$= 2\pi h \int_{r_1}^{r_2} \frac{4\mu A^2}{r^3} \, dr = 4\pi h \mu A^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

4. En la figura se representa un corte esquemático de un Hovercraft de peso  $50kN$  y de  $6m$  de diámetro, el cual se suspende en el aire un cierto huelgo  $h$  por la acción de una hélice que aspira el aire, expulsándolo luego por este huelgo. Suponga que la cavidad interior es grande, de forma tal de que el aire dentro de ésta se encuentra relativamente en reposo, acelerándose sólo cuando sale por el pequeño huelgo.
- Calcular la presión necesaria en la cámara de aire interior para mantenerlo suspendido.
  - Calcular la velocidad de salida y el caudal de aire necesario, si el huelgo es de  $3\text{ cm}$ .
  - Calcular la potencia del motor necesaria, si la eficiencia general del conjunto motor es del  $70\%$ .
  - Analice si el equilibrio anterior es estable frente a perturbaciones en  $h$ .



*Respuesta:*

- El peso del vehículo se equilibra con la fuerza debido a la diferencia de presiones entre el interior y el exterior, actuando sobre un área equivalente a la proyección de la superficie de la cámara sobre el piso:

$$W = \Delta p \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow p_i - p_a = \frac{4W}{\pi D^2} = \frac{450 \times 10^3 N}{\pi 36 m^2} = 1768 Pa$$

- Aplicando Bernoulli entre un punto en la cámara interior (donde la velocidad es despreciable) y otro en la ranura de salida (donde la presión es igual a la atmosférica):

$$p_i = p_a + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(p_i - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1768 \frac{kgm}{s^2m^2}}{1.1 \frac{kg}{m^3}}} = 56.7 \frac{m}{s}$$

y el caudal será:

$$Q = v \pi D h = 56.7 \pi 6 \cdot 0.03 \frac{m^3}{s} = 32 \frac{m^3}{s}$$

- La potencia a entregar al aire será el producto de la fuerza por la velocidad, o el caudal por la diferencia de presiones:

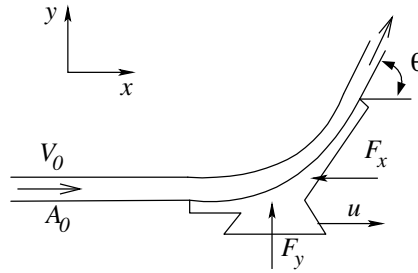
$$W_u = Fv = \Delta p Av = \Delta p Q = 1768 \frac{N}{m^2} 32 m^3/s = 56.7 kW$$

La potencia necesaria se obtiene, teniendo en cuenta la eficiencia:

$$W = W_u / 0.7 = 81 kW$$

- Una disminución del huelgo provocaría un aumento de la velocidad del fluido en la salida, lo que tendería a aumentar la diferencia de presiones, elevando al vehículo y aumentando el huelgo. Y viceversa. Por lo tanto el equilibrio es estable.

5. Considerar el álabe de la figura en el cual incide un chorro a una velocidad  $V_0$  de sección circular  $A_0$ . Este chorro es desviado un ángulo  $\theta$  por el álabe.



- Si se deja fijo el álabe ( $u = 0$ ) mediante la aplicación de una fuerza  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ , calcule las componentes de dicha fuerza en función de  $V_0$ ,  $A_0$  y el ángulo  $\theta$ .
- Si la fuerza es un poco menor que la calculada arriba y el álabe comienza a moverse: ¿A qué velocidad  $u = u(V_0)$  debería moverse para que la potencia transferida por el chorro sea máxima?
- Para este último caso, encuentre el ángulo  $\theta$  en el que la potencia es máxima.

*Respuesta:*

- Tomando un volumen de control rectangular, que incluya al álabe, con el fluido entrando por su lateral izquierdo y saliendo por la parte superior, aplicamos el teorema de Reynolds en un sistema de referencia en reposo, aplicado al momento, componente  $x$ :

$$\sum F_x = \frac{d\bar{u}}{dt} \int_{VC} \rho u_x = \int_{VC} \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \int_{SC} \rho u_x \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

La única fuerza actuante es  $F_x$ , nuestra incógnita. El primer término de la suma es 0 porque el sistema está en estado estacionario. La integral en la superficie sólo es diferente de 0 en el chorro de entrada y en el de salida, calculádo:

$$F_x = \rho V_0 (-V_0) A_0 + \rho V_1 \cos \theta (V_1 \sin \theta) A_p$$

donde  $V_1$  es la velocidad del chorro de salida y  $A_p$  el área cortada por el VC. Si  $A_1$  es el área normal del chorro de salida,  $A_1 = A_p \sin \theta$ . Si los efectos viscosos no son significativos, la velocidad de salida debe ser igual a la de la entrada (aplicando la integral de Bernoulli entre puntos a la misma presión), y por lo tanto  $V_1 = V_0$ . Por conservación de masa, además:  $A_1 = A_0$ , resultando:

$$F_x = -\rho A_0 V_0^2 (1 - \cos \theta)$$

Aplicado el teorema de Reynolds al momento en la dirección  $y$ , sólo contribuye a la integral de superficie el chorro de salida (en la entrada  $u_y = 0$  y resulta:

$$F_y = \rho V_1 \sin \theta (V_1 \sin \theta) A_p = \rho A_0 V_0^2 \sin \theta$$

- Nos conviene tomar el mismo volumen de control, esta vez en un sistema de referencia que se mueva con el álabe. En este sistema de referencia el movimiento del fluido será en estado estacionario. Podemos aplicar el teorema de Reynolds anulando la integral de volumen, y además aplicar Bernoulli para obtener la velocidad de salida del chorro. En este sistema de referencia entonces las cuentas son idénticas, salvo que debemos reemplazar la velocidad  $V_0$  por  $V_0 - u$ . La fuerza horizontal resulta:

$$F_x = -\rho A_0 (V_0 - u)^2 (1 - \cos \theta)$$

La potencia transferida es:

$$W = F_x u = -\rho A_0 (V_0 - u)^2 (1 - \cos \theta) u$$

y tiene un extremo en el intervalo  $(0, V_0)$ , que se puede obtener derivando e igualando a 0:

$$\frac{dW}{du} = -\rho A_0(1 - \cos \theta) [(V_0 - u)^2 - 2u(V_0 - u)] = 0$$

$$\implies u = \frac{V_0}{3}$$

c) La potencia máxima (para  $u = V_0/3$ ) resulta:

$$W = -\frac{4}{27}\rho A_0 V_0(1 - \cos \theta)$$

Si además buscamos la máxima potencia variando  $\theta$ , se puede obtener:

$$W = -\frac{8}{27}\rho A_0 V_0$$

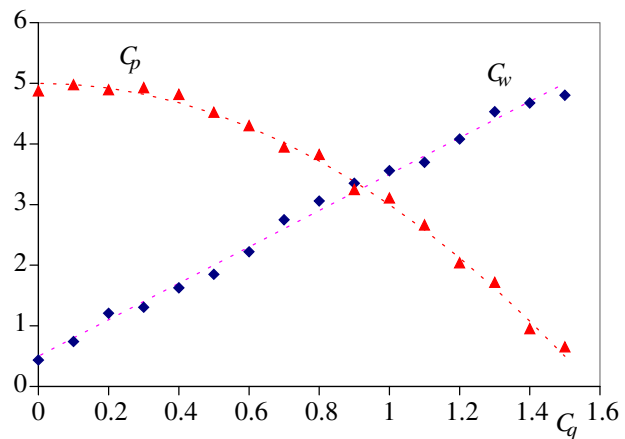
cuando  $\theta = \pi$ .

6. Si se desprecia el efecto de la viscosidad, la figura siguiente muestra resultados típicos para el flujo en una bomba obtenidos del ensayo de un modelo con agua: el incremento de presión ( $\Delta p = C_p \rho \Omega^2 D^2$ ) disminuye y la potencia necesaria ( $P = C_w \rho \Omega^3 D^5$ ) aumenta al aumentar el coeficiente adimensional de flujo ( $C_q = \frac{Q}{\Omega D^3}$ ). Del ajuste de los datos experimentales se obtienen las siguientes expresiones analíticas:

$$C_p = 5 - 2C_q^2, \quad C_w = 0.5 + 3C_q$$

Supongamos que se construye una bomba similar a la del experimento, de 12 cm de diámetro con el objetivo de mover un caudal de  $25 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  de gasolina a  $20^\circ\text{C}$ . Si la velocidad de giro de la bomba es de  $30 \frac{\text{rev}}{\text{s}}$ , determine:

- El incremento de presión.
- La potencia necesaria.



*Respuesta:* En dispositivos similares geoméricamente se conservan todos los números adimensionales que justamente surgen de relaciones geométricas. En tal caso se pueden utilizar las curvas obtenidas en el experimento, simplemente obteniendo los números adimensionales correspondientes. En nuestro caso el coeficiente adimensional de flujo vale:

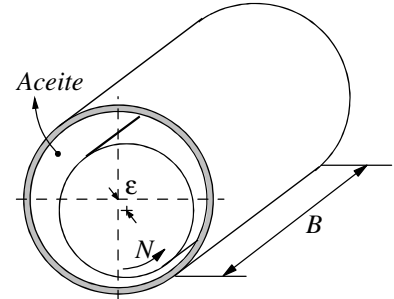
$$C_q = \frac{25 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{30 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot 0.12^3 \text{m}^3} = 0.134$$

Aplicando los ajustes dato se obtiene un coeficiente de presión:  $C_p = 4.964$  y un coeficiente de potencia:  $C_w = 0.902$ , que, volviendo a las variables dimensionales resultan:

- $\Delta p = 4.964 \cdot 680 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot 30^2 \cdot \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 0.12^2 \text{m}^2 = 43.75 \text{ KPa}$
- $P = 0.902 \cdot 680 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot 30^3 \cdot \frac{1}{\text{s}^3} \cdot 0.12^5 \text{m}^5 = 412 \text{ W}$

7. Considerar el problema de un árbol de levas (eje) de un automóvil de diámetro  $D$ .

El eje gira a  $N$  vueltas por minuto dentro de la cavidad horizontal de un rodamiento de anchura  $B$  con un pequeño juego diametral (huelgo)  $h$  ocupado por un fluido de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$ . El eje soporta una masa  $M$  colgada, produciendo en equilibrio de fuerzas (problema estacionario) una cierta excentricidad  $\epsilon$ , tal como ejemplifica la figura.



- a) Mediante el análisis dimensional calcule la excentricidad de un eje de diámetro  $40\text{mm}$  y ancho  $30\text{mm}$  rotando a  $3000\text{rpm}$  soportando una carga de  $6\text{Kg}$  en un baño de aceite de viscosidad  $0.003\text{Pa}\cdot\text{s}$  y densidad  $0.8\text{g}/\text{cm}^3$ , sabiendo que en un modelo similar de diámetro  $30\text{mm}$ , ancho  $20\text{mm}$  y juego diametral de  $55\mu\text{m}$  que gira a  $6000\text{rpm}$  lubricado por una película de aceite de viscosidad  $0.05\text{Pa}\cdot\text{s}$  y densidad  $0.75\text{g}/\text{cm}^3$  se midieron las cargas y excentricidades indicadas en la tabla.

F [N]	$\epsilon$ [ $\mu\text{m}$ ]
100	8
2550	16
5000	24

Para resolver el problema, se plantean las siguientes hipótesis:

- 1) El único efecto de la masa colgada del eje, es a través de su peso.
  - 2) El huelgo  $h$  es uniforme a lo largo del todo el ancho.
  - 3) Los efectos inerciales son despreciables frente a los viscosos.
- b) Discutir la validez de la última hipótesis.

*Respuesta:*

- a) Dadas las dimensiones involucradas, se puede suponer que el flujo del lubricante tendrá simetría de traslación, es decir, que no dependerá de la posición axial. Con esta aproximación tomamos como variable la fuerza sostenida por unidad de profundidad:  $F/B$ . Dicha fuerza podrá ser calculada de los demás parámetros del problema:

- La frecuencia de giro:  $N$ .
- El diámetro del eje:  $D$ .
- El huelgo diametral:  $h$ .
- La excentricidad:  $\epsilon$ .
- La viscosidad del fluido:  $\mu$ .
- La densidad del fluido:  $\rho$ .

La matriz dimensional resulta:

	$\frac{F}{B}$	$N$	$D$	$h$	$\epsilon$	$\mu$	$\rho$
M	1	0	0	0	0	1	1
L	0	0	1	1	1	-1	-3
T	-2	-1	0	0	0	-1	0

Son 7 variables dimensionales, y el rango de la matriz dimensional es 3, entonces se puede obtener una relación entre 4 números adimensionales. Trataremos de que uno de ellos contenga sólo la fuerza, otro sólo la excentricidad (para poder utilizar la tabla del experimento). También sería útil obtener el número de Reynolds, para utilizar la hipótesis de que los efectos inerciales son despreciables frente a los viscosos. Estas consideraciones llevan a elegir como columnas independientes de la matriz dimensional a:  $N$ ,  $D$  y  $\mu$ . Se obtienen los números adimensionales:

- $\pi_1 = \frac{F}{B\mu DN}$
- $\pi_2 = \frac{h}{D}$

- $\pi_3 = \frac{\epsilon}{D}$
- $\pi_4 = \frac{\rho D^2 N}{\mu}$

Si los efectos inerciales son despreciables, el resultado no depende de  $\rho$ . Las mediciones se hacen en un modelo con similaridad geométrica, de modo que en ambos casos se mantiene  $\pi_2$  (la relación huelgo/diámetro). En definitiva podemos plantear una relación:  $\pi_1 = f(\pi_3)$  que podemos deducir de los datos experimentales. Reescribimos la tabla dato para los números adimensionales:

$\pi_1 = \frac{F}{B \mu D N}$	$\pi_3 = \frac{\epsilon}{D}$
556	0.000267
14167	0.000533
27778	0.0008

En el caso de interés,  $\pi_1$  vale:

$$\frac{F}{B \mu D N} = \frac{6\text{Kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.03\text{m} \cdot 0.003 \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \cdot 0.04\text{m} \cdot 3000\text{s}^{-1}} = 5444$$

Ajustando una lineal con los datos de la tabla se obtiene:

$$\pi_3 = 0.000362, \quad \rightarrow \quad \epsilon = 14\mu\text{m}$$

- b) La justificación de que los efectos viscosos dominan a los inerciales se hace evaluando el número de Reynolds. En nuestro caso se puede plantear más de un número de Reynolds, por ejemplo:  $\pi_4 = \frac{\rho N D^2}{\mu}$  es una variante donde se toma como velocidad característica  $4\pi$  por la velocidad tangencial del eje ( $ND = 4\pi\omega R$ ) y como tamaño característico el diámetro del eje. Este número vale en nuestro caso:  $\pi_4 = \frac{800 \cdot 3000 \cdot 0.04^2}{0.003} = 1280000$ , lo que no puede justificar el despreciar las fuerzas de inercia. Sin embargo, si consideramos que el fluido en realidad se encuentra limitado a circular entre el eje y el cojinete, el tamaño característico que corresponde tomar es el huelgo. El Reynolds calculado de esta forma resulta:

$$Re_h = \frac{\rho N D h}{\mu} \simeq 2300$$

Todavía este número de Reynolds es bastante alto. Analicemos la relación entre fuerzas viscosas y de inercia en una porción de fluido contenida en un sector ( $\Delta R$ ,  $R\Delta\theta$ ,  $w$ ). La aceleración media de una partícula será del orden de  $V^2/R$ , la masa del fluido es  $\rho \Delta R R \Delta\theta w$ . Una fuerza típica de inercia será entonces:  $F_i = \rho V^2 \Delta R \Delta\theta w$ . Por otra parte una fuerza viscosa típica se puede obtener multiplicando una tensión viscosa por un área. Una tensión viscosa característica se obtiene con  $\mu \frac{V}{\Delta R}$  (la velocidad va desde 0 hasta  $V$  en  $\Delta R$ ). La superficie que corresponde a la porción de fluido en consideración es  $R \Delta\theta w$ , por lo tanto una fuerza viscosa característica será:  $F_v = \mu \frac{V}{\Delta R} w R \Delta\theta$ . La relación entre estas fuerzas es:

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho V^2 \Delta R \Delta\theta w}{\mu \frac{V}{\Delta R} R \Delta\theta w} = \frac{\rho V \Delta R \Delta R}{\mu R}$$

En nuestro caso, escribiendo  $V \simeq N D$ ,  $\Delta R \simeq h$  y  $R = D/2$  resulta:

$$\frac{F_i}{F_v} \simeq 8$$

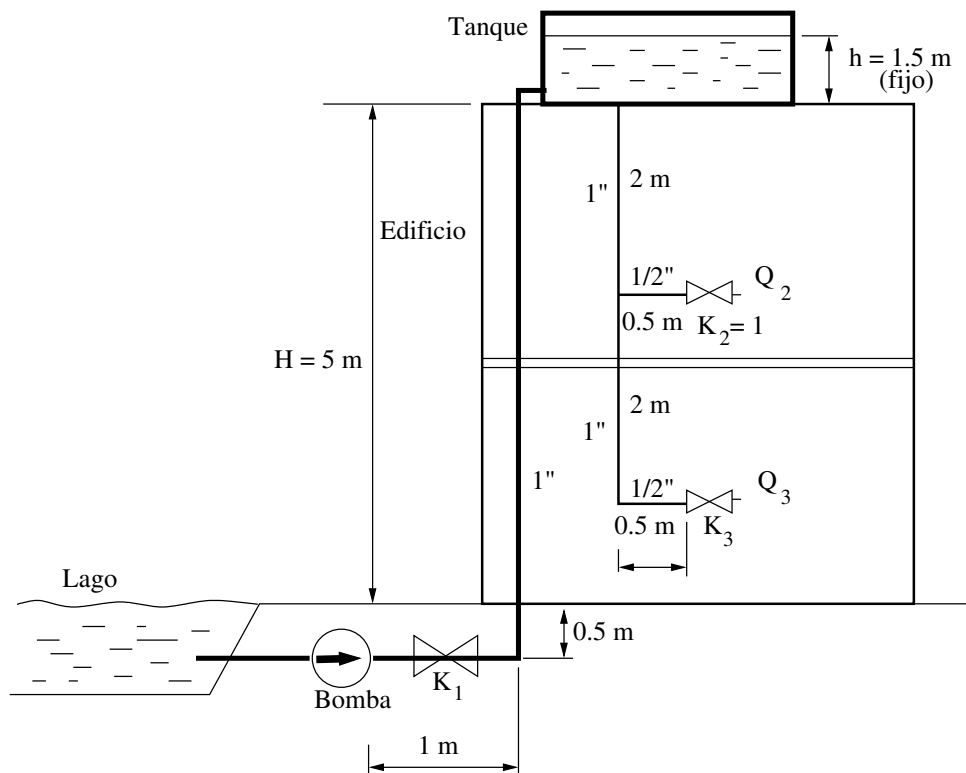
Las fuerzas inerciales pueden alterar la distribución de presiones en el fluido, pero están lejos de provocar la transición a régimen turbulento.

8. Se tiene un edificio con un tanque de agua en su azotea que está alimentado por una bomba como se indica en la figura. El fondo del tanque se encuentra a 5 m por encima del nivel del lago. Como se puede apreciar en el gráfico el caño que sube tiene un diámetro de 1", el caño que baja tiene también un diámetro de 1" y los dos tramos horizontales que alimentan cada planta tienen 1/2". La válvula  $K_2$  se encuentra totalmente abierta y se desea que el caudal  $Q_3$  sea igual al  $Q_2$ . Todos los caños tienen una rugosidad de 0.25 mm.

Se pide calcular:

- La constante de la válvula  $K_3$  y el valor de los caudales.
- Considerando que la curva de la bomba es  $H_p[m] = 14 - 10^{-3}Q^2[l/min]$ , ajustar la válvula  $K_1$  de manera que el nivel del tanque  $h$  se mantenga constante.
- ¿Qué ocurre si el valor de  $K_1$  difiere del calculado en el punto anterior?

Suponer que las pérdidas localizadas en entradas, salidas y codos, así como también el tramo inicial de toma de agua del lago, son despreciables.



Respuesta:

- Analicemos la "rama" que va desde la superficie del agua en el tanque hasta la salida del piso superior. La diferencia en "head" es:  $\Delta h_{sup-2} = 3.5m - \frac{v_2^2}{2g}$ , que igualamos a las pérdidas por fricción:

$$3.5m - \frac{v_2^2}{2g} = \left( f_{1/2''} \frac{L_2}{D_2} + K_2 \right) \frac{v_2^2}{2g} + f_{1''} \frac{L_v}{D_v} \frac{v_v^2}{2g}$$

donde el sub-índice "v" corresponde al tramo vertical. Utilizando  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ ,  $L_2 = 0.5m$ ,  $D_2 = 0.0127m$ ,  $K_2 = 1$ ,  $L_v = 2m$ ,  $D_v = 0.0254m$ .  $v_v$  se puede poner en función de  $v_2$ , considerando que por el tramo vertical circula un caudal  $2Q_2$ :  $2\pi \frac{D_2^2}{4} v_2 = \pi \frac{D_v^2}{4} v_v \Rightarrow v_v = v_2/2$ .

En el tramo 2, el coeficiente de rugosidad es:  $\frac{\epsilon}{D_2} = \frac{0.25mm}{12.7mm} = 0.02$ , en el tramo vertical, la mitad:  $\frac{\epsilon}{D_v} = 0.01$ . Suponiendo flujo completamente rugoso los coeficientes de fricción de Darcy, tomados del diagrama de Moody resultan:  $f_{1/2''} = 0.049$ ,  $f_{1''} = 0.038$ . Resulta:

$$3.5m = \left( 1 + 1 + 0.049 \frac{0.5}{0.0127} + 0.038 \frac{2}{0.0254} \frac{1}{4} \right) \frac{v_2^2}{19.6m/s^2}$$

Resolviendo:  $v_2 = 3.83m/s$ , el número de Reynolds en el tramo 2 resulta ser:  $Re_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = \frac{3.83 \cdot 0.0127}{10^{-6}} = 48600$ . Verificamos en el diagrama de Moody y resulta estar efectivamente en régimen completamente rugoso, el  $f_{1/2''} = 0.049$  es correcto. En el tramo vertical el  $Re_v$  es el mismo (doble diámetro, mitad velocidad), pero para un coeficiente de rugosidad de la mitad el coeficiente de fricción se modifica un poco ( $f_{1''} \simeq 0.039$ ). Con este nuevo valor la velocidad  $v_2$  casi no cambia:  $v_2 = 3.82 \frac{m}{s}$ . El caudal resulta:  $Q_2 = v_2 \pi \frac{D_2^2}{4} = 0.484 \cdot 10^{-3} m^3/s$

Calculando la rama que va al piso inferior resulta:

$$5.5m = \left( 1 + K_3 + 0.049 \frac{0.5}{0.0127} + 0.039 \frac{2}{0.0254} \frac{1}{4} + 0.04 \frac{2}{0.0254} \frac{1}{16} \right) \frac{v_3^2}{19.6m/s^2}$$

donde se utilizó que en el tramo vertical inferior la velocidad es  $\frac{1}{4}$  de la velocidad en los tramos horizontales. El  $Re$  en ese tramo es la mitad, 24300 lo que da un coeficiente de fricción un poco mayor. Haciendo las cuentas,  $K_3 = 3.5$ .

- b) Analizamos ahora la rama entre el lago y el tanque. La condición de mantener el nivel de tanque constante equivale a que el caudal de esta rama sea de:  $Q = 2Q_2 = 0.978 \cdot 10^{-3} m^3/s = 58.7 \frac{l}{min}$ . Según la curva de la bomba, este punto de operación corresponde a un  $h_b = 14 - 0.001 Q^2 = 10.55m$ . Esta ganancia en la línea de nivel energético debe compensar las pérdidas por fricción y la diferencia de alturas:

$$10.55m = 6.5m + \frac{v^2}{2g} \left( f \frac{L}{D} + K_1 \right)$$

Haciendo las cuentas, con  $L = 6.5m$ ,  $D = 0.0254m$ , se obtiene:

- $v = 1.93m/s$
- $Re = 49000$
- $f = 0.038$
- $K_1 = 11.33$

- c) Si  $K_1$  es menor, el nivel del tanque subirá, si es mayor, el nivel descenderá. Podría eventualmente llegarse a un nuevo equilibrio. Por ejemplo: reemplazando los  $6.5m$  en la fórmula anterior por  $5m$  se obtiene el  $K_1$  máximo para que el tanque no llegue a vaciarse. El dibujo no aclara cuánto puede subir el nivel del tanque sin rebalsar.