

# Mecánica de Fluidos - 2007

## Problemas resueltos

### Cinemática

1. Se tiene el siguiente campo de velocidades:

$$v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_z = 0$$

- Encuentre las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de humo.
- Encuentre una expresión para el campo Lagrangiano de velocidades (tome como referencia el tiempo  $t = 0$ ).

Si a  $t = 0$  se tiene una mancha contaminante de la forma:

$$C(x, y, z) = C_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}}$$

y se sabe que el contaminante es un isótopo radiactivo que decae según la ley:  
 $C = C_i e^{-t/\lambda}$ ,

- ¿Cuál será la concentración de contaminante que medirá un sensor ubicado en el punto  $(\sigma, 0, 0)$  a tiempo  $t = 0$ ?
- Encuentre la tasa de cambio de la concentración que medirá el mismo sensor, en el mismo punto, en el mismo instante  $t = 0$ .

*Respuesta:*

- Como se trata de un campo estacionario, las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de humo serán coincidentes. La velocidad en todo punto es paralela al vector posición (proyectado sobre el plano  $x - y$ ), de manera que toda partícula del fluido se mueve siempre alejándose del eje  $z$ , describiendo rectas radiales.

Para obtener una expresión formal de la ecuación de estas líneas se puede partir de la ecuación de las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{ds} = v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dy}{ds} = v_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dz}{ds} = v_z = 0$$

eliminando el parámetro  $s$  e integrando desde un punto en particular  $(x_0, y_0, z_0)$  se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x}, \quad \log \frac{y}{y_0} = \log \frac{x}{x_0} \Rightarrow \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}, \quad z = z_0$$

- Sabemos que el campo Lagrangiano de velocidades ( $V$ ) evaluado en  $(x, t)$  debe ser igual al campo Euleriano ( $v$ ) evaluado en  $(\Phi(x, t), t)$ , donde  $\Phi(x, t)$  es la posición, a tiempo  $t$ , de la partícula que en cierto tiempo

de referencia estaba en la posición  $x$ . Además, el campo Lagrangiano de velocidades se puede obtener de la función  $\Phi(x, t)$ , tomando su derivada parcial respecto del tiempo:

$$V(x, t) = v(\Phi(x, t), t) = \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t}$$

para nuestro caso particular, todas las líneas son radiales y equivalentes, en el sentido en que la velocidad cambia sólo con el radio, podemos simplificar el cálculo restringiéndonos al eje  $x$ :

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = V(x, t) = v(\Phi(x, t), t) = \frac{1}{\Phi}$$

de donde, considerando que al tiempo de referencia  $t = 0$ , la partícula se encuentra en  $\Phi_0 = \Phi(x, 0) = x$ :

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} w dw = \int_0^t dt \Rightarrow \Phi^2 - \Phi_0^2 = 2t$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{x^2 + 2t}$$

derivando:

$$V(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2t}}$$

Si quisiéramos generalizar este resultado -obtenido para una partícula en el eje  $x$ - a todo el espacio, “ $x$ ” debe ser interpretado como el radio, y “ $V$ ” como la velocidad radial:

$$V_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 2t}}, V_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 2t}}, V_z = 0$$

c) Sustituyendo en la expresión de  $C(x, y, z)$ , a  $t = 0$ :

$$C(\sigma, 0, 0) = C_0 e^{-\sigma^2/\sigma^2} = \frac{C_0}{e}$$

d) La ley de decaimiento radiactivo es válida para cada punto material, de manera que derivando la expresión  $C = C_i e^{-t/\lambda}$  se obtiene la derivada material de la concentración del contaminante. La tasa de variación medida por el sensor fijo al espacio representa la *derivada parcial con respecto al tiempo* del campo Euleriano de concentraciones. Usando la expresión de la derivada material:

$$\frac{DC}{Dt} = v \cdot \nabla C + \frac{\partial C}{\partial t}$$

se conocen la derivada material, el campo de velocidades, y el gradiente del campo euleriano en el instante  $t = 0$ . Despejando  $\frac{\partial C}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{DC}{Dt} - v \cdot \nabla C = \frac{-C_i}{\lambda} e^{-t/\lambda} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial C}{\partial x}$$

donde  $C_i$  es la concentración inicial de contaminante en el punto en cuestión ( $C_i = C_0/e$ ):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-C_0}{e\lambda} e^{-0} + \frac{1}{\sigma} C_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} \frac{2x}{\sigma^2} = \frac{-C_0}{e\lambda} + \frac{1}{\sigma} C_0 e^{-1} \frac{2}{\sigma} = \frac{C_0}{e} \left( \frac{2}{\sigma^2} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

2. Si la intensidad de iluminación de una partícula fluida en  $(x, y, z)$  al tiempo  $t$  está dada por:

$$I = A \frac{e^{-3t}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

y el campo de velocidades del fluido está dado por:

$$v_x = B(y + 2z) \quad v_y = B(y + 3z) \quad v_z = B(2x + 3y + 2z)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes conocidas, determine la velocidad de variación de la iluminación experimentada al tiempo  $t$  por la partícula fluida que está en el punto  $(1, 2, -2)$  al tiempo  $t$ .

*Respuesta:* Lo que se pide es exactamente el concepto de *Derivada material*, en este caso de la iluminación recibida por una partícula fluida. Dados el campo Euleriano de iluminación y el campo de velocidades con que se mueve el fluido, la expresión de la derivada material es:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) I$$

Siendo las derivadas parciales:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -3A \frac{e^{-3t}}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -2xA \frac{e^{-3t}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = -2yA \frac{e^{-3t}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -2zA \frac{e^{-3t}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

La expresión final resulta:

$$\frac{DI}{Dt} = -A \frac{e^{-3t}}{x^2 + y^2 + z^2} \left[ 3 + \frac{2B}{x^2 + y^2 + z^2} (yx + 4zx + y^2 + 6zy + 2z^2) \right]$$

Evaluando en el punto  $(1, 2, -2)$  resulta:

$$\frac{DI}{Dt} = A \frac{e^{-3t}}{9} (4B - 3)$$

3. Sean las componentes del campo de velocidades de un fluido:

$$v_x = \frac{x}{1+t} \quad v_y = \frac{2y}{1+t} \quad v_z = \frac{3z}{1+t}$$

Calcule las trayectorias.

*Respuesta:* Si  $\Phi(x, t)$  es la trayectoria seguida por una partícula fluida que en un cierto tiempo de referencia estaba en  $x$ , el campo de velocidades Euleriano dato se puede expresar como:

$$v(\Phi(x, t), t) = V(x, t) = \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = \dot{\Phi}$$

donde  $V(x, t)$  es el campo Lagrangiano de velocidades. Escribiendo en componentes:

$$\left( \dot{\Phi}_x, \dot{\Phi}_y, \dot{\Phi}_z \right) = \left( \frac{\Phi_x}{1+t}, \frac{2\Phi_y}{1+t}, \frac{3\Phi_z}{1+t} \right)$$

Dado que la ecuación diferencial:  $\frac{du}{dt} = \frac{au}{1+t}$  tiene como solución a:  $u = u_0(1+t)^a$ , entonces:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= A(1+t) \\ \Phi_y &= B(1+t)^2 \\ \Phi_z &= C(1+t)^3 \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial:  $\Phi(x, 0) = x$  resulta la expresión final para las trayectorias, donde  $t$  es el parámetro y  $(x, y, z)$  la posición inicial de la partícula:

$$\begin{cases} \Phi_x = x(1+t) \\ \Phi_y = y(1+t)^2 \\ \Phi_z = z(1+t)^3 \end{cases}$$

4. En las proximidades de un punto de remanso (o *punto de estancamiento*) bidimensional, la velocidad está dada por:

$$u = U_0 \frac{x}{L}, \quad v = -U_0 \frac{y}{L}, \quad w = 0$$

- Calcular el vector aceleración y verificar que es puramente radial.
- Hallar las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de humo, dibujarlas esquemáticamente.
- En particular dibuje la trayectoria de la partícula que a  $t = 0$  estaba en el punto  $(0, 2L, 0)$ , la línea de corriente que, a tiempo  $L/U_0$ , pasa por el punto  $(2L, L, 0)$  y la línea de humo del punto  $(2L, 0, 0)$ , en el instante  $t = L/U_0$ .

*Respuesta:*

- Para calcular la aceleración a partir del campo euleriano de velocidades, se calcula la derivada material de la velocidad:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

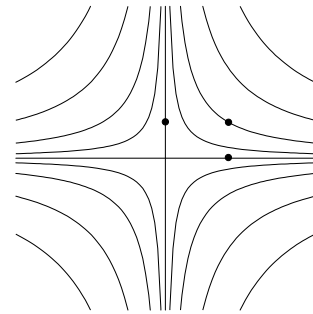
$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + u \frac{U_0}{L} + 0 + 0 \\
a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 + v \left( -\frac{U_0}{L} \right) + 0 \\
a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
a_x &= \frac{U_0^2}{L^2} x, \quad a_y = \frac{U_0^2}{L^2} y, \quad a_z = 0
\end{aligned}$$

Siendo la aceleración un múltiplo  $\left(\frac{U_0^2}{L^2}\right)$  del vector posición.

- b) Como se trata de un campo estacionario, las líneas de corriente, las trayectorias, y las líneas de humo serán coincidentes. Calculemos las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad \frac{L dx}{U_0 x} = -\frac{L dy}{U_0 y}, \quad \ln x = -\ln y + c, \quad x = \frac{k}{y}$$

Entonces las líneas de corriente tienen la forma:  $y = \frac{k}{x}$ , como se indica en la figura.

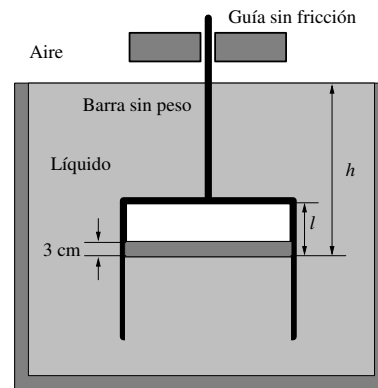


- c) La trayectoria de la partícula que a  $t = 0$  estaba en el punto  $(0, 2L, 0)$  es la semirrecta:  $(x = 0, y > 0)$ . La línea de corriente que, a tiempo  $L/U_0$ , pasa por el punto  $(2L, L, 0)$  es la curva:  $(y = \frac{2L^2}{x})$ . Y la línea de humo del punto  $(2L, 0, 0)$ , en el instante  $t = L/U_0$  es la semirrecta  $(x > 0, y = 0)$

# Hidrostatica

1. La figura muestra un cilindro invertido cerrado herméticamente por un pistón con una superficie de  $0,1m^2$  y un peso de  $500kg$  que se desliza sin fricción. El peso y el volumen del cilindro pueden ser despreciados. Inicialmente, el cilindro y el pistón son sostenidos por la barra en el aire a una presión de  $1kg/cm^2$  y la longitud  $l = 2m$  cuando el pistón está en estado de equilibrio. Luego el cilindro y el pistón son introducidos en el líquido hasta una posición en la que no hay tracción ni compresión en la barra. En dicha posición  $h/l = 2$ . Asumiendo que el gas en el cilindro permanece a una temperatura constante y que su peso es despreciable:

- Calcular la tensión inicial en la barra en  $kgf$ .
- Calcular la presión final en el cilindro en  $kgf/cm^2$ .
- Calcular el peso específico del líquido (relativo al agua).
- Determinar si la posición final es de equilibrio estable, inestable o neutro.



*Respuesta*

- Si consideramos despreciable el peso del aire, la tensión inicial de la barra es igual al peso del pistón:  $500kgf$ . Si deseamos tener en cuenta la densidad finita del aire, se puede calcular la masa de aire contenida en el interior del cilindro utilizando la aproximación de gas ideal:  $PV = nRT$ . La presión interna debe ser tal que su diferencia con la presión atmosférica multiplicada por el área del pistón se iguale al peso del mismo:  $(P_{atm} - P_i)A = 500kgf$ , de donde:  $P_i = 1kgf/cm^2 - \frac{500kgf}{0,1m^2} = 0,5kgf/cm^2$ . Calculamos el número de moles de aire:

$$n = \frac{P_i V}{RT} = \frac{50009,8kgm}{m^2s^2} \frac{0,1m^2 1,97m}{8,314 \frac{Nm}{molK} 273,15K} = 4,25mol$$

y tomando la masa molecular del aire en  $28,9g/mol$ , llegamos a  $122,8g$  de aire en el interior del cilindro. A la misma temperatura, pero a presión atmosférica, habría una cierta cantidad de aire ocupando el espacio del cilindro con el pistón:

$$n = \frac{P_{atm} V'}{RT} = \frac{100009,8kgm}{m^2s^2} \frac{0,1m^2 2m}{8,314 \frac{Nm}{molK} 273,15K} = 8,63mol$$

En gramos:  $8,63mol 28,9g/mol = 249,4g$ . La tensión de la barra será igual al peso del pistón más el peso del aire en el interior del cilindro, menos el empuje del aire desplazado:

$$T = (500 + 0,123 - 0,249)kgf = 499,87kg 9,8 \frac{m}{s^2} = 4899N$$

Como se ve, despreciar el peso del aire conduce a un error menor al 0,03 %.

- b) Siguiendo con la aproximación de gas ideal y considerando que la temperatura no cambiará, el producto  $PV$  se mantiene:

$$P_f = \frac{P_i V_i}{V_f} = 0,5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \frac{A 1,97m}{A(l - 0,03m)} = \frac{96530Pa m}{l - 0,03m} \quad (1)$$

donde  $l$  es la longitud indicada en la figura, en el estado de equilibrio. Además sabemos que en equilibrio, la diferencia de presiones entre las caras del pistón es igual a su peso:

$$P_h - P_f = \frac{500\text{kgf}}{0,1m^2} = 49000Pa \quad (2)$$

y que las presiones en la cara inferior del pistón y en la cara superior del cilindro pueden calcularse como:

$$P_h = P_{atm} + \rho g h \quad (3)$$

$$P_f = P_{atm} + \rho g (h - l) \quad (4)$$

y finalmente que en la condición de equilibrio:

$$h = 2l \quad (5)$$

Estamos en condiciones de calcular, usando las ecuaciones 1 a 5, las 5 incógnitas:  $l$ ,  $P_f$ ,  $P_h$ ,  $\rho$  y  $h$ . Reemplazando (3) en (2) eliminamos  $P_h$ :

$$P_{atm} + \rho g h - P_f = 49000Pa \quad (6)$$

Despejando  $\rho g$  de (4), reemplazando en (6) y operando se llega a:

$$P_f - P_{atm} = \frac{h - l}{l} 49000Pa \quad (7)$$

reemplazando  $h$  por lo indicado en (5):

$$P_f = P_{atm} + 49000Pa = 147000Pa = 1,5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

- c) De la ecuación (1) se puede despejar  $l$ :

$$l = 0,03m + \frac{96530Pa m}{147000Pa} = 0,687m$$

de (6) y (5):

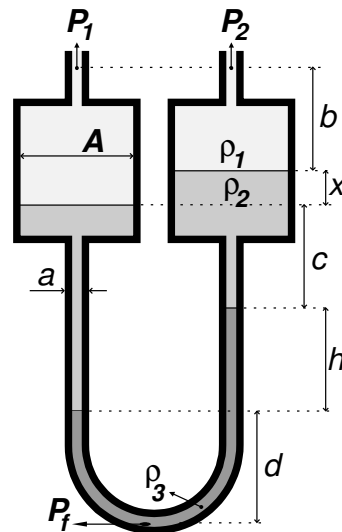
$$\rho = \frac{49000Pa + P_f - P_{atm}}{g 2l} = \frac{98000 \frac{\text{kg}m}{s^2m^2}}{9,8 \frac{m}{s^2} 2 \cdot 0,687m} = 7278 \frac{\text{kg}}{m^3}$$

O sea, un peso específico de  $\sim 7,3$ .

- d) Dado que el único grado de libertad es la posición vertical del cilindro, analizaremos la estabilidad ante una perturbación en la posición de equilibrio:  $h - l$ . Si se sumerge el sistema un poco más allá de la posición de equilibrio, la presión en su interior aumentará, y, aplicando la ecuación de estado del gas en su interior, su volumen decrecerá. Este menor volumen hará que el empuje ejercido por el fluido sobre el sistema cilindro-pistón se haga menor, y el sistema tenderá a bajar aún más por efecto del peso que no cambió. Por lo tanto el equilibrio del sistema es inestable. (También se puede plantear la hipótesis opuesta: una menor profundidad conduce a menor presión en el interior del cilindro, que conduce a mayor volumen y por lo tanto mayor empuje que supera al peso del sistema y tiende a hacer flotar aún más al dispositivo)

2. Un manómetro de tres fluidos como el que se muestra en la figura se utiliza para medir diferencias de presión ( $P_1 - P_2$ ) muy pequeñas. Sabiendo que se utiliza la misma cantidad de líquido en ambos reservorios obtenga:

- a) La ecuación que relaciona la diferencia de altura  $h$  medida en las ramas con la diferencia de presión  $P_1 - P_2$  como función de las densidades de los fluidos utilizados ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ) y las áreas de los reservorios y las ramas ( $A$  y  $a$  respectivamente).
- b) ¿Cómo elegiría estos parámetros para aumentar la sensibilidad del instrumento?



*Respuesta:*

- a) Dadas las distancias  $b, c, d$  marcadas en la figura, la presión  $P_f$  se puede calcular de dos maneras, integrando  $\rho g$  en cada una de las ramas:

$$P_f = P_1 + \rho_1 g(b+x) + \rho_2 g(c+h) + \rho_3 g d = P_2 + \rho_1 g b + \rho_2 g(x+c) + \rho_3 g(h+d)$$

Simplificando, se eliminan  $b, c, d$ :

$$P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1) g x + (\rho_3 - \rho_2) g h$$

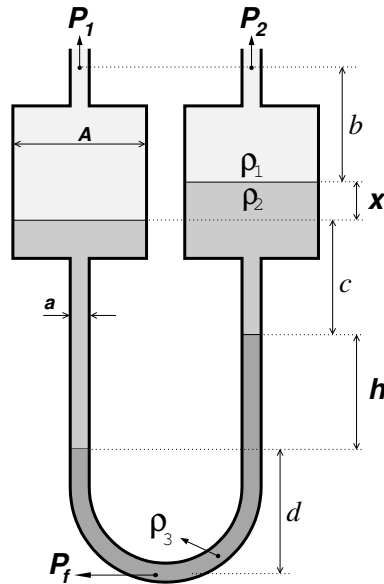
Usando además que, por continuidad:  $Ax = ah$  se obtiene:

$$P_1 - P_2 = \left[ (\rho_2 - \rho_1) \frac{a}{A} + (\rho_3 - \rho_2) \right] g h$$

b) La sensibilidad será mayor cuanto menor sea la expresión:

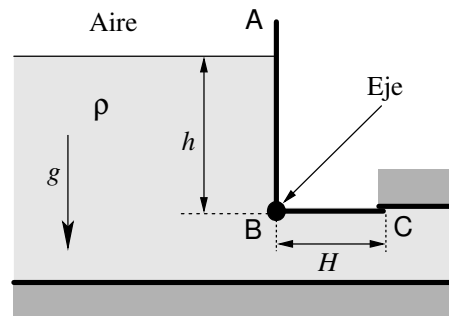
$$\left[ (\rho_2 - \rho_1) \frac{a}{A} + (\rho_3 - \rho_2) \right]$$

Suponiendo que no se puede cambiar la densidad  $\rho_1$  del líquido donde queremos medir la diferencia de presión, se puede hacer mínima la relación de áreas  $a/A$  y la diferencia de densidades  $\rho_3 - \rho_2$  entre los líquidos del manómetro.



3. Considere la compuerta en forma de L que se muestra en la figura. Dicha compuerta tiene un ancho  $H$  (B-C) y puede rotar libremente (sin fricción) alrededor de un eje (perpendicular a la hoja) que pasa por el punto B.

Despreciando el peso de la puerta, ¿Cuál es el valor de la altura  $h$  para el cual la compuerta se abre automáticamente?



*Respuesta:* Planteamos equilibrio de momentos con respecto al punto de giro de la compuerta. Las fuerzas actuantes son las de presión actuando en la parte horizontal de la compuerta ( $F_v$  porque actúa en dirección vertical) y la integral de la presión actuando en la parte vertical, que llamaremos  $F_h$ . La línea de acción de  $F_v$  estará centrada en la parte horizontal de la compuerta, con un brazo de palanca  $H/2$ , porque en esa sección la presión es uniforme. Para hallar la línea de acción de  $F_h$  podemos integrar el momento producido

por las presiones, o podemos recurrir a la fórmula para calcular el “centro de presiones”:  $x'_{cp} = \frac{\rho g \sin \theta I_{xx}}{A p_{cg}}$ , donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación, en este caso  $\frac{\pi}{2}$ .  $A$  es el área de la superficie, en nuestro caso  $h$  (suponiendo profundidad unitaria).  $p_{cg}$  es la presión en el centro geométrico de la superficie, en este caso  $p_{cg} = p_{atm} + \rho g \frac{h}{2}$ . El momento de inercia de un segmento es  $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dx = \frac{h^3}{12}$ . Resultando:

$$x'_{cp} = \frac{\rho g \frac{h^3}{12}}{h \left( p_{atm} + \rho g \frac{h}{2} \right)}$$

El brazo de palanca de  $F_h$  será  $\frac{h}{2} - x'_{cp}$ . Las magnitudes de  $F_h$  y  $F_v$  se calculan como el producto de la presión en los centros geométricos de las superficies respectivas por sus áreas:

$$F_v = (p_{atm} + \rho g h) H, \quad F_h = \left( p_{atm} + \rho g \frac{h}{2} \right) h$$

Sólo resta tener en cuenta las fuerzas de presión en el exterior de la compuerta, que estará dada por la presión atmosférica (aproximadamente constante):

$$\sum M = F_v \frac{H}{2} - F_h \left( \frac{h}{2} - x'_{cp} \right) + p_{atm} h \frac{h}{2} - p_{atm} H \frac{H}{2} = 0$$

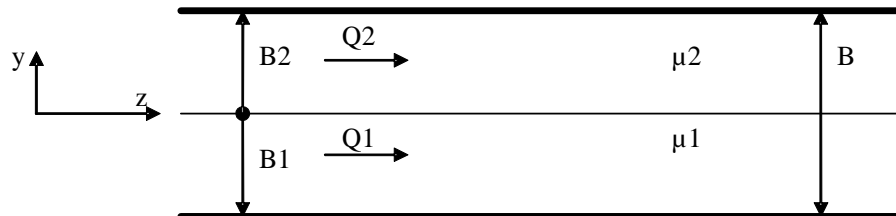
Reemplazando y operando:

$$\dots \quad h = \sqrt{3}H$$

*Observación:* Nótese que si bien algunos valores intermedios (por ejemplo la ubicación del centro de presiones) dependen de la presión atmosférica, el resultado final no. Esto es porque sumar una constante a la presión -a ambos lados de la compuerta- no altera el equilibrio de fuerzas. Teniendo esto en cuenta se podría haber considerado  $p_{atm} = 0$  para simplificar los cálculos.

## Ecuaciones diferenciales

1. Dos fluidos inmiscibles e incompresibles de propiedades  $\rho_1, \mu_1$  y  $\rho_2, \mu_2$  respectivamente, circulan debido a un gradiente de presión  $\frac{dp}{dz}$  en un estrecho canal horizontal de ancho  $B$  (en la dirección  $y$ ) como se indica en la figura. Los caudales de cada fluido se ajustan de forma tal que  $B_1 = B_2 = B/2$ .



Suponiendo flujo laminar completamente desarrollado calcular:

- La distribución de velocidades  $V_z(y)$  en ese sistema y esquematice.
- Determine la relación precisa entre el gradiente de presión y caudal total.

*Respuesta:*

- Dada la simetría del problema, proponemos un perfil de velocidades dado por:

$$\vec{V} = (0, 0, V_z) \quad (8)$$

además, teniendo en cuenta que buscamos la solución estacionaria, todas las derivadas parciales con respecto al tiempo serán cero. Plantando la conservación de masa para un fluido incompresible obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

De aquí obtenemos que  $V_z$  será sólo función de la coordenada  $y$ .

Planteamos ahora la ecuación de conservación de momento en la dirección  $z$  (Ecuación de Navier-Stokes para fluido Newtoniano incompresible):

$$\rho \frac{dV_z}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} = f_z + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

donde  $f_z$  son las fuerzas por unidad de volumen en la dirección  $z$ , que en este caso son nulas. Utilizando el perfil de velocidades 8 y teniendo en cuenta lo dicho hasta ahora, la ecuación 10 se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \quad (11)$$

debido a que la viscosidad toma valores diferentes para cada fluido, dividimos la región en dos partes de forma tal que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} & -\frac{B}{2} \leq y \leq 0 \\ \mu_2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} & 0 \leq y \leq \frac{B}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Al plantear la ecuación de conservación de momento en la dirección  $x$  e  $y$  obtenemos respectivamente:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \quad (13)$$

de esta manera, integrando las ecuaciones 12 obtenemos una expresión para el perfil de velocidades dado por:

$$V_z(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_1} \frac{\partial P}{\partial z} y^2 + b_1 y + c_1 & -\frac{B}{2} \leq y \leq 0 \\ \frac{1}{2\mu_2} \frac{\partial P}{\partial z} y^2 + b_2 y + c_2 & 0 \leq y \leq \frac{B}{2} \end{cases} \quad (14)$$

donde  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  son constantes que debemos determinar a partir de las condiciones de borde. Las condiciones de borde del problema son:

- 1) La condición de no deslizamiento en las paredes *i.e.*

$$V_z\left(-\frac{B}{2}\right) = 0, \quad V_z\left(\frac{B}{2}\right) = 0 \quad (15)$$

- 2) Continuidad de la velocidad en  $y = 0$
- 3) Continuidad de la tensión en  $y = 0$ , es decir,  $\mu \frac{\partial V_z}{\partial y}$  es continuo en  $y = 0$ .

De la segunda condición obtenemos  $c_1 = c_2 = C$ . De la última condición obtenemos:

$$\mu_1 b_1 = \mu_2 b_2$$

Si llamamos  $\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  y  $D = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial z}$  las ecuaciones 15 se transforman en

$$\frac{D}{2} \left(\frac{B}{2}\right)^2 + b_1 \frac{B}{2} + C = 0 \quad (16)$$

$$\beta \frac{D}{2} \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \beta b_1 \frac{B}{2} + C = 0 \quad (17)$$

Multiplicando 16 por  $\beta$  y sumándola a 17 obtenemos

$$C = -\frac{\beta}{\beta + 1} \frac{DB^2}{4}$$

Asi mismo, multiplicando 16 por  $\beta$  y restándole 17 obtenemos

$$b_1 = \frac{C\beta - 1}{B\beta} = -\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{DB}{4}$$

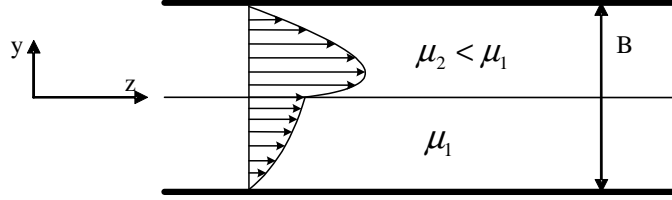
De esta manera reemplazando en las ecuaciones 14 los valores de las constantes obtenemos para el perfil de velocidades:

$$V_z(y) = \begin{cases} \frac{D}{2} \left( y^2 - \frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{B}{2} y - \frac{\beta}{\beta+1} \frac{B^2}{2} \right) & -\frac{B}{2} \leq y \leq 0 \\ \frac{\beta D}{2} \left( y^2 - \frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{B}{2} y - \frac{1}{\beta+1} \frac{B^2}{2} \right) & 0 \leq y \leq \frac{B}{2} \end{cases} \quad (18)$$

O, en variables originales:

$$V_z(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_1} \frac{\partial p}{\partial z} \left( y^2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{B}{2} y - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{B^2}{2} \right) & -\frac{B}{2} \leq y \leq 0 \\ \frac{1}{2\mu_2} \frac{\partial p}{\partial z} \left( y^2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1} \frac{B}{2} y - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{B^2}{2} \right) & 0 \leq y \leq \frac{B}{2} \end{cases} \quad (19)$$

En la siguiente figura se muestra esquemáticamente el perfil de velocidades para el caso  $\mu_2 < \mu_1$



En cada sección el perfil es parabólico y en la interfase las pendientes guardan una relación igual a  $\beta$ .

- b) Para calcular el caudal total debemos integrar el campo de velocidades entre las placas:

$$\frac{HD}{2} \left[ \int_{-\frac{B}{2}}^0 \left( y^2 - \frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{B}{2} y - \frac{\beta}{\beta+1} \frac{B^2}{2} \right) dy + \beta \int_0^{\frac{B}{2}} \left( y^2 - \frac{\beta-1}{\beta+1} \frac{B}{2} y - \frac{1}{\beta+1} \frac{B^2}{2} \right) dy \right] \quad (20)$$

Donde  $H$  representa el ancho del canal en la dirección  $x$ . Realizando la integral obtenemos para la expresión del caudal:

$$Q = -\frac{HDB^3}{12} \left( -\frac{\beta+1}{4} + \frac{3(\beta-1)^2}{8(\beta+1)} + \frac{3\beta}{\beta+1} \right) \quad (21)$$

O, en variables originales:

$$Q = -\frac{HB^3}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{1}{8} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \right) \quad (22)$$

donde queda explícita la “simetría” entre  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Nótese que si las viscosidades de los dos fluidos son iguales ( $\beta = 1$ ) el caudal se reduce al caudal para un solo fluido entre dos placas:

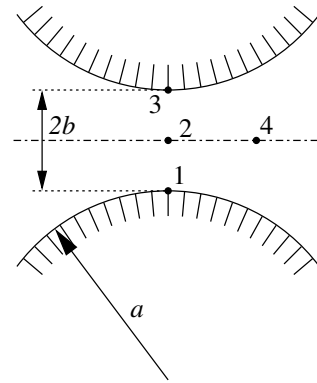
$$Q = -\frac{HB^3}{12} \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Además, si, por ejemplo  $\mu_1$  tiende a un valor muy grande, el primer término del paréntesis tiende a  $\frac{1}{8\mu_2}$ , mientras que el segundo término se hace despreciable. El caudal resultante tiende al que se obtendría con el fluido de viscosidad menor, circulando en un canal de la mitad de tamaño.

## Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli

1. Considerar el flujo incompresible, bidimensional, estacionario y sin fricción cerca de la garganta del pasaje de un Venturi. El flujo es irrotacional y los efectos gravitacionales son despreciables. La constante de Bernoulli del flujo es  $p_0$  (medida como una presión). Cerca de la garganta el contorno de la pared es un arco circular de radio  $a$ . Como una aproximación, se acuerda en suponer que en el plano de la garganta 1-3 la curvatura de las líneas de corriente varía linealmente desde  $\frac{1}{a}$  en el punto 1 hasta 0 en el punto 2 (y  $-\frac{1}{a}$  en el punto 3). Se desea analizar la distribución de velocidades en los alrededores de la garganta.

- a) ¿Es la velocidad del fluido mayor en el punto 1 o en el punto 2?
- b) ¿Es la velocidad del fluido mayor en el punto 2 o en el punto 4?
- c) Hacer un esquema cualitativo de la distribución de presiones (líneas de presión constante).
- d) Calcular la distribución de presiones en el plano de la garganta. Verifique que  $\frac{p_0 - p_2}{p_0 - p_1} = e^{-\frac{b}{a}}$ , donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones estáticas en los puntos 1 y 2, respectivamente.
- e) ¿Cómo calcularía el perfil de velocidades?



*Respuesta:*

- a) Dadas las aproximaciones del enunciado (flujo incompresible, estacionario, irrotacional y sin fricción, con efectos gravitacionales despreciables), se puede aplicar la ecuación de Bernoulli en todo punto del flujo, y por eso tiene sentido hablar de la constante de Bernoulli “del flujo”. Entre el punto 1 y el 2 podemos utilizar las ecuaciones en “coordenadas naturales”, en particular en la dirección transversal al flujo:

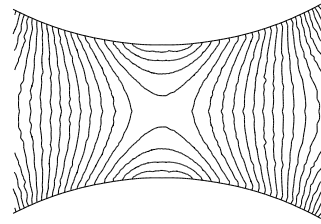
$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{v^2}{R}$$

Esta ecuación, según la convención utilizada para definir el versor  $n$ , nos indica que la presión debe aumentar alejándose del centro de curvatura de la línea. En particular la presión en el punto 2 será mayor que en el punto 1. Como se cumple Bernoulli en todo el espacio ( $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cte}$ ), la velocidad en 2 será menor que en 1.

- b) Por conservación de la masa, dado que la densidad es constante, se conserva el caudal volumétrico. Puesto que el área de paso es mínima en la garganta, allí la velocidad será máxima, entonces  $v_2 > v_4$ .

- c) Por el resultado del ítem *a*, la presión sobre corte vertical en la garganta debería mostrar un máximo de la presión en el punto medio, y mínimos en los puntos 1 y 3. Por el resultado de *b*, un corte horizontal por el centro de la garganta debería mostrar un mínimo de presiones en el punto central (considerando que la velocidad es máxima, y aplicando Bernoulli). Por lo tanto, el punto central es un punto de ensilladura de la función presión.

En la figura se muestran las líneas de nivel del módulo de velocidad, obtenidas mediante la resolución numérica del flujo en la geometría dada. Estas líneas de módulo de velocidad constante se corresponden (aplicando la ecuación de Bernoulli) con líneas de presión constante. Nótese sin embargo que el espaciamiento de las líneas se corresponde con diferencias del módulo de la velocidad y no diferencias de presión.



- d) Para calcular la distribución de presiones en la línea central se puede integrar la ecuación de arriba, teniendo en cuenta la variación del radio de curvatura de las líneas de corriente. Tomando el origen de coordenadas en el punto central, y llamando  $x$  a la coordenada vertical, la curvatura puede expresarse como:  $\frac{1}{R} = -\frac{x}{ab}$ , y utilizando la ecuación de Bernoulli:  $p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2$ , la ecuación en la dirección transversal al flujo queda:

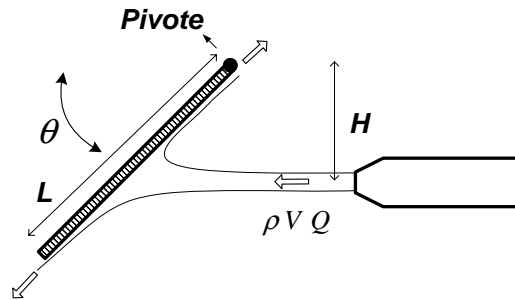
$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{-x}{ab} v^2 = -\rho \frac{x}{ab} \frac{2(p_0 - p)}{\rho} \\ &= -\frac{\partial(p_0 - p)}{\partial x} = -\frac{2(p_0 - p)}{ab} x \\ \int_{p_1}^p \frac{d(p_0 - p)}{p_0 - p} &= \frac{2}{ab} \int_{-b}^x x dx \\ \ln(p_0 - p)|_{p_1}^p &= \frac{1}{ab} (x^2 - b^2), \quad \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} = e^{\frac{x^2 - b^2}{ab}} \end{aligned}$$

Evaluando en  $x = 0$ :  $\frac{p_0 - p_2}{p_0 - p_1} = e^{-\frac{b^2}{ab}}$

- e) Una vez calculada la presión, la velocidad se deduce de la ecuación de Bernoulli:  $v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)}$ .

## Volúmenes de control

1. Un jet de un líquido de densidad  $\rho$ , caudal volumétrico  $Q$  y velocidad  $V$  incide sobre una placa de largo  $L$  y masa  $M$  que esta sostenida en uno de sus extremos por un pivote que le permite rotar libremente como lo muestra la figura. Si el jet se ubica una distancia  $H$  por debajo del pivote calcular:



- a) El ángulo  $\theta$  que formará la placa con la horizontal en el estado estacionario en función de estos parámetros. Considerar los efectos viscosos despreciables.
- b) ¿Cómo cambia este resultado si se tiene en cuenta el efecto de la viscosidad del fluido?

*Respuesta:*

- a) Si realizamos conservación de momento angular respecto del pivote vemos que los dos jet de salida no poseen momento angular debido a que poseen una dirección radial respecto del pivote. De esta manera el momento entrante del jet deberá ser compensado por el torque ejercido por la gravedad sobre la placa resultando:

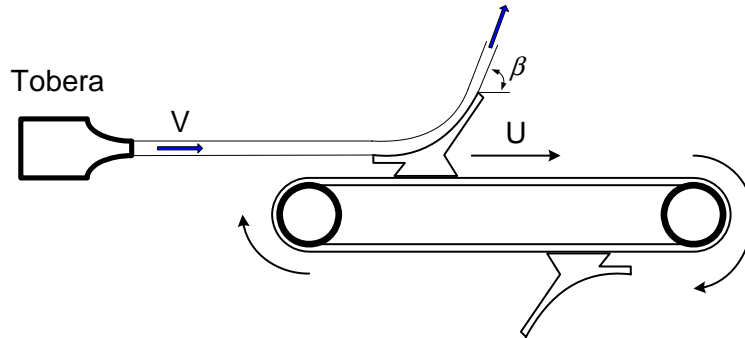
$$Q\rho V \cdot H = \frac{Mg \cdot L \cos(\theta)}{2}$$

De aquí obtenemos finalmente

$$\theta = \arccos \left( \frac{2\rho QVH}{MgL} \right)$$

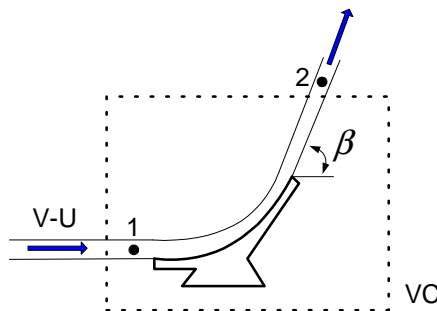
- b) En el análisis anterior sólo fue necesario hacer suposiciones sobre la viscosidad del fluido, sólo es necesario que se cumpla la aproximación de que los jet de salida son radiales respecto del pivote. De esta manera, el resultado anterior no depende de la viscosidad del líquido (ni de la rugosidad de la placa por ejemplo)mientras esta condición se siga cumpliendo.
2. El esquema muestra un dispositivo que posee dos paletas con una curvatura suave que termina con un ángulo  $\beta$ . Las paletas están montadas sobre una cinta que se mueve a velocidad constante  $U$ . Además, las paletas reciben un chorro de agua proveniente de una tobera fija a una velocidad  $V$ .

- a) Calcule la fuerza que realiza la paleta sobre la cinta en función de la velocidad  $U$ .
- b) Calcule para qué valor de  $U$  el trabajo realizado contra esta fuerza es máximo



*Respuesta:*

- a) Planteamos inicialmente el problema utilizando un sistema de referencia fijo a la paleta y en este sistema de referencia proponemos un volumen de control fijo como lo muestra la siguiente figura:



De esta manera la velocidad de ingreso al volumen de control (VC) es  $V - U$ . Suponiendo los esfuerzos viscosos despreciables en la paleta podemos plantear Bernoulli entre los puntos 1 y 2 indicados en la figura. De esta forma obtenemos:

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

Debido a que ambos puntos se encuentran a presión atmosférica y despreciando los efectos gravitatorios (i.e.  $g(z_2 - z_1) \ll V_1^2$ ) obtenemos:

$$|V_1| = |V_2| = V - U$$

Planteamos la conservación de masa en el VC :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\partial\Omega} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Teniendo en cuenta que estamos considerando el caso estacionario ( $d/dt = 0$ ) y dividiendo la superficie de control en dos partes obtenemos:

$$\int_{S_1} \rho (V - U) ds = \int_{S_2} \rho \vec{V}_2 \cdot \vec{n} ds = \rho (V - U) A_1 = \dot{m}_{in} \quad (23)$$

donde  $A_1$  es un área equivalente de entrada del jet proveniente de la tobera y  $\dot{m}_{in}$  representa el caudal másico de entrada.

Planteamos la conservación de momento en el VC :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F} - \int_{\partial\Omega} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Gamma$$

Porcediendo de la misma manera que en el caso de la conservación de masa y teniendo en cuenta que la normal apunta hacia afuera del VC, esta expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= - \int_{S_1} \rho (V - U)^2 ds + \\ &\int_{S_2} \rho ((V - U) \cos \beta \hat{x} + (V - U) \sin \beta \hat{y}) \vec{V}_2 \cdot \vec{n} ds \end{aligned} \quad (24)$$

La sumatoria de la izquierda incluye las fuerzas volumétricas y de superficie aplicadas al VC. Teniendo en cuenta que sobre todas sus superficies actúa la presión atmosférica y despreciando tanto los efectos viscosos como los gravitatorios esta sumatoria se reduce a la fuerza que realiza la paleta sobre el fluido (y a su vez la cinta sobre la paleta). De esta forma, reemplazando lo hallado en 23 obtenemos:

$$\vec{F}_{paleta} = -\dot{m}_{in} (V - U) \hat{x} + \dot{m}_{in} ((V - U) \cos \beta \hat{x} + (V - U) \sin \beta \hat{y}) \quad (25)$$

o bien, reagrupando términos y usando la definición de  $\dot{m}_{in}$  :

$$\vec{F}_{paleta} = A_1 \rho (V - U)^2 ((\cos \beta - 1) \hat{x} + \sin \beta \hat{y}) \quad (26)$$

- b) El trabajo realizado por la fuerza calculada en 26 por unidad de tiempo sobre la cinta se puede calcular a partir de:

$$W = \vec{F}_{paleta} \cdot U \hat{x} = A_1 \rho (\cos \beta - 1) (V - U)^2 U \quad (27)$$

Para obtener el valor de  $U$  que produce la mayor potencia calculamos la derivada con respecto a  $U$  de  $W$  e igualamos a cero. De esta manera obtenemos la condición para la velocidad:

$$(V - U)^2 - 2U (V - U) = 0 \quad (28)$$

De aquí podemos ver que  $V = U$  es solución de 28, aunque en este caso la potencia calculada por 27 es cero. Eliminando esta solución de la ecuación 28 obtenemos:

$$(V - U) - 2U = 0 \quad i.e. \quad U = \frac{V}{3} \quad (29)$$

Y esta es la solución que buscamos.

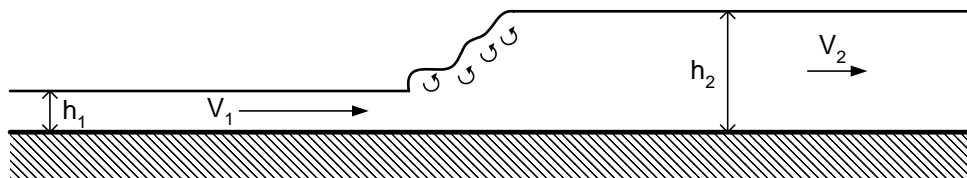
3. Un flujo en un resalto hidráulico puede esquematizarse como se muestra en la figura. Un flujo de altura  $h_1$  y velocidad media  $V_1$ , en un canal, se transforma espontáneamente en un flujo de altura  $h_2$  y velocidad media  $V_2$ . Se considera un canal muy ancho, y tal que no hay variaciones significativas en la dirección perpendicular al plano del dibujo. Se ha observado que a una pequeña distancia del salto la distribución de velocidades es razonablemente uniforme.

- a) Mostrar, discutiendo las suposiciones necesarias, que la relación entre  $h_2$  y  $h_1$  cumple:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8Fr_1^2}$$

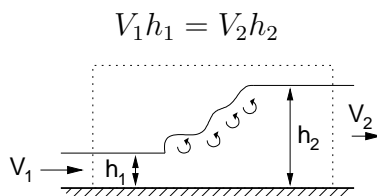
donde  $Fr_1$  es el número de Froude del estado 1,  $Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g \cdot h_1}}$

- b) Calcular la disipación de energía mecánica entre las secciones 1 y 2.  
c) Pueden existir resaltos hidráulicos con  $h_2 < h_1$ ? ¿Por qué?



*Respuesta:*

- a) Planteando conservación de la masa, en un volumen de control como el de la figura, se obtiene que:



Planteando conservación de la cantidad de movimiento en el mismo volumen de control se tiene:

$$\int_{\partial VC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_{VC} \vec{f} + \int_{\partial VC} -p \vec{n} dS$$

en la dirección horizontal queda:

$$-\rho V_1^2 h_1 b + \rho V_2^2 h_2 b = \int_1 p dS - \int_2 p dS$$

donde  $b$  es el ancho del canal (normal al dibujo). Si restamos la presión atmosférica, la presión hidrostática en cada pared vertical se puede expresar como:  $p = \rho g y$ , con la coordenada  $y$  medida en cada caso desde la superficie:

$$-\rho b (V_1^2 h_1 - V_2^2 h_2) = b \left[ \int_0^{h_1} \rho g y dy - \int_0^{h_2} \rho g y dy \right]$$

Usando la conservación de la masa y simplificando:

$$\frac{h_1 V_1}{g} (V_1 - V_2) = \frac{h_1 V_1^2}{gh_2} (h_2 - h_1) = \frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} = \frac{(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)}{2}$$

Una posible solución de esta ecuación es, como es natural:  $h_2 = h_1$ , o sea que el fluido siga circulando a la misma velocidad. Pero también existe otra solución que conserva tanto la masa como el momento cinético y es la que cumple:

$$h_2 + h_1 = \frac{2h_1 V_1^2}{gh_2}$$

Despejando se obtiene la cuadrática:  $h_2^2 + h_1 h_2 - \frac{2}{g} h_1 V_1^2$ , cuya solución es:

$$h_2 = \frac{-h_1 \pm \sqrt{h_1^2 + 8 \frac{h_1 V_1^2}{g}}}{2}$$

Definiendo  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$ , dividiendo todo por  $h_1$ , y considerando que la solución físicamente posible es aquella para la cual  $h_2$  es positivo, se obtiene:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}$$

- b) Planteando la conservación de la energía en el mismo volumen de control se tiene:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} - \int_{\partial VC} \rho \left( \frac{1}{2} u^2 + e + V \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

esta expresión se anula porque estamos en estado estacionario. Haciendo  $e = 0$  y con un potencial  $V = gz$  llamaremos a:  $\dot{W} - \dot{Q}$  la disipación de energía mecánica:

$$\begin{aligned} \Phi &= - \int_{\partial VC} \rho \left( \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\ &= \rho \left( \frac{V_1^2}{2} b h_1 + gb \int_0^{h_1} z dz \right) (-V_1) - \rho \left( \frac{V_2^2}{2} b h_2 + gb \int_0^{h_2} z dz \right) V_2 \end{aligned}$$

resolviendo las integrales, y llamando  $Q = V_1 h_1 = V_2 h_2$  se llega a:

$$\Phi = \frac{\rho b Q}{2} (V_1^2 + gh_1 - V_2^2 - gh_2)$$

usando conservación de la masa:  $h_1 h_2 (V_1 + V_2) = Q(h_1 + h_2)$ , además, por la conservación del impulso:  $2Q(V_1 - V_2) = g(h_1 + h_2)(h_2 - h_1)$ , reemplazando en la expresión de  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\rho b Q}{2} [(V_1 - V_2)(V_1 + V_2) - g(h_2 - h_1)] \\ &= \frac{\rho b Q}{2} \left[ \frac{(h_1 + h_2)(h_2 - h_1)g}{2Q} \frac{Q(h_1 + h_2)}{h_1 h_2} - g(h_2 - h_1) \right] \\ &= \frac{\rho b Q g (h_2 - h_1)}{2} \left[ \frac{(h_1 + h_2)^2}{2h_1 h_2} - 1 \right] \\ \Phi &= \rho b Q g (h_2 - h_1) \frac{h_1^2 + h_2^2}{4h_1 h_2} \end{aligned}$$

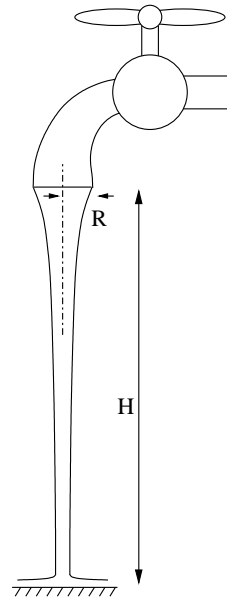
- c) De la expresión de  $\Phi$ , surge que la disipación será positiva sólo en el caso que  $h_2 > h_1$ , de otra manera en lugar de disipar energía mecánica se estaría absorbiendo, contradiciendo el segundo principio de la termodinámica.

Puede además verse (operando a partir de la expresión del punto a)) que la condición  $h_2 > h_1$  es equivalente a pedir que el número de Froude en la entrada sea mayor que 1:

$$\begin{aligned} h_2 > h_1 &\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} > 1 \\ &\Rightarrow 1 < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8Fr_1^2} \\ &\Rightarrow 3 < \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \Rightarrow 8 < 8Fr_1^2 \\ &\Rightarrow Fr_1^2 = \frac{V_1^2}{gh_1} > 1 \end{aligned}$$

4. Un chorro de agua fluye verticalmente desde la salida de una canilla cuyo orificio de salida es circular y de radio  $R$ . El orificio de salida se encuentra a una altura  $H$  medido desde el nivel del suelo. El agua a la salida del orificio tiene velocidad  $U$  y el perfil es plano.

- a) Encuentre una expresión para la variación del radio del chorro en función de la altura.
- b) Calcule la fuerza que ejerce el chorro de agua sobre el piso, si el caudal es de 5 litros por minuto,  $R$  vale 1/4 de pulgada y  $H = 50\text{cm}$ .
- c) Grafique en forma cualitativa la presión en el piso en función de la distancia al centro del chorro. Explícite los valores extremos de la presión.



*Respuesta:*

- a) Considerando despreciables los efectos viscosos (el perfil inicial es plano, la viscosidad del aire es muy pequeña y por lo tanto la tensión de corte no es significativa), podemos aplicar la ecuación de Bernoulli entre el punto de salida y una posición genérica, a una distancia  $z$  de la canilla:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + p_0 = \frac{1}{2}\rho u(z)^2 + p(z) + \rho g(-z)$$

Donde se ha hecho la aproximación de que la curvatura de las líneas de corriente es despreciable, y por lo tanto la presión no depende del radio,

siendo sólo función de la altura. Considerando además que la presión en la superficie del es la presión atmosférica (constante), la expresión para la velocidad en función de la altura se reduce a:

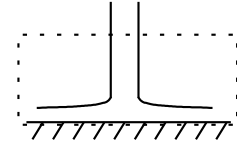
$$u(z) = \sqrt{U^2 + 2gz}$$

Por conservación de la masa, el caudal (velocidad por área) a cualquier altura es el mismo:  $Q = u(z)A(z) = u(z)\pi r(z)^2 = U\pi R^2$  Eliminando  $u(z)$  se obtiene:

$$r = \sqrt{\frac{UR^2}{\sqrt{U^2 + 2gz}}} = R \left(1 + \frac{2gz}{U^2}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

- b) Al llegar a una distancia  $H$  de la canilla, el líquido se moverá a una velocidad  $u(H) = \sqrt{U^2 + 2gH}$ , y el área del chorro será:  $A(z) = \frac{U\pi R^2}{u(H)}$ . Tomando el volumen de control de la figura y calculando el balance de momento en la dirección vertical ( $y$ ), se tiene que:

$$0 = - \int_{SC} \rho u_y (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + F = 0$$



donde  $F$  es la fuerza ejercida por el piso sobre el chorro para frenarlo.

De la integral sólo queda la parte de la superficie superior por donde ingresa el fluido (el flujo de momento que escapa por los costados consideramos que no tiene componente vertical). En esa parte:  $u_y = -u(H)$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{n} = -u(H)$ :

$$F = \rho u(H)^2 A(H) = \rho (U^2 + 2gH) \frac{\pi R^2 U}{\sqrt{U^2 + 2gH}} = \rho \pi R^2 U \sqrt{U^2 + 2gH}$$

Usando:

$$\begin{aligned} \rho &= 1000 \text{kg/m}^3 \\ R &= 1/4'' = 0,00635 \text{m} \\ U &= \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{m}^3 / 60 \text{s}}{\pi 0,00635^2 \text{m}^2} = 0,658 \text{m/s} \\ H &= 0,5 \text{m} \end{aligned}$$

Se obtiene:

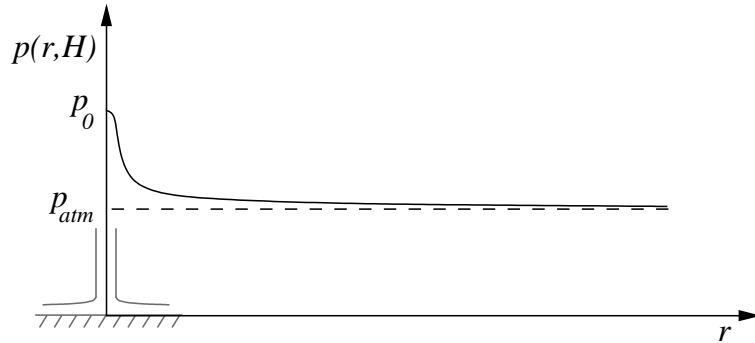
$$\begin{aligned} u(H) &= 3,2 \text{m/s} \\ A(H) &= 26,05 \times 10^{-6} \text{m}^2 \\ F &= 1000 \text{kg/m}^3 3,2^2 \text{m}^2 / \text{s}^2 26,05 \times 10^{-6} \text{m}^2 = 0,267 \text{N} = 27,2 \vec{g} \end{aligned}$$

- c) Las partículas que descienden por el eje de simetría se van frenando asintóticamente. Nunca llegan al piso, porque la velocidad tiende a cero.

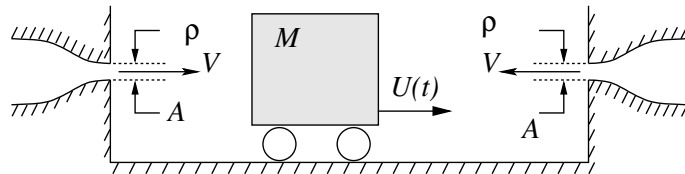
Se tiene en la intersección del eje de simetría con el piso un *punto de estancamiento*. Allí la presión será máxima, e igual a:

$$p_0 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho u(H)^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho gH$$

Suficientemente lejos de este punto, la presión tenderá a ser nuevamente la presión atmosférica, como se muestra en la figura.

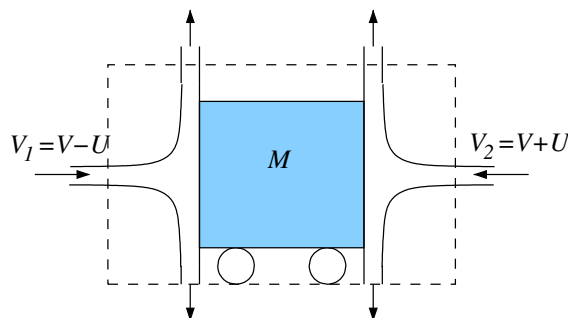


5. Un bloque rectangular de masa  $M$ , con caras verticales, rueda sobre una superficie horizontal entre dos chorros opuestos, como se muestra en la Figura. En  $t = 0$ , el bloque se pone en movimiento a una velocidad  $U_0$ . Subsecuente mente se mueve sin fricción, paralelo a los ejes del chorro, con velocidad  $U(t)$ . Desprecie la masa de cualquier líquido que se adhiera al bloque, comparada con  $M$ . Obtenga expresiones generales para la aceleración  $a(t)$  y la velocidad  $U(t)$  del bloque. Justifique la elección del sistema de referencia y del recinto de integración.



*Respuesta:*

Consideremos un volumen de control no deformable que encierra al bloque y se mueve junto con él, tal como se muestra en la Figura que sigue.



El sistema de referencia elegido está fijo al volumen de control, por lo que se trata de un sistema de referencia no inercial ya que el bloque se está frenando, moviéndose con velocidad variable  $U(t)$  y aceleración  $a(t)$  respecto a un sistema de referencia inercial.

Despreciando los efectos viscosos podemos aplicar Bernoulli a lo largo de una línea de corriente en los chorros que inciden sobre el bloque para obtener:

$$V_{1in} = V_{1out} = V - U$$

Y, del mismo modo:

$$V_{2in} = V_{2out} = V + U$$

Planteando conservación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x$  en el VC elegido y teniendo en cuenta que en nuestro sistema de referencia la velocidad de los chorros de salida no tiene componente horizontal, resulta:

$$\begin{aligned} -M \cdot a(t) &= -\dot{m}_1(V - U) + \dot{m}_2(V + U) \\ -M \cdot \frac{dU}{dt} &= -\rho A(V - U)^2 + \rho A(V + U)^2 \\ -M \cdot \frac{dU}{dt} &= \rho A \cdot [-(V - U)^2 + (V + U)^2] \\ -M \cdot \frac{dU}{dt} &= 4\rho AVU \\ \frac{dU}{dt} &= -\left(\frac{4\rho AV}{M}\right) \cdot U \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación, recordando que  $U(t = 0) = U_0$ , viene dada por:

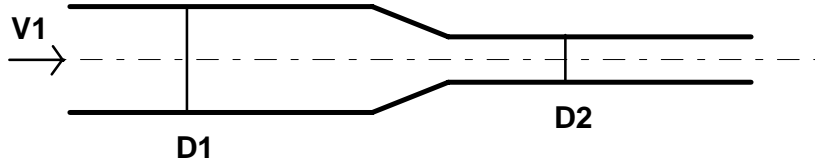
$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\left(\frac{4\rho AV}{M}\right)t}$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dU}{dt} \\ a(t) &= -\frac{4\rho AV}{M} \cdot U_0 \cdot e^{-\left(\frac{4\rho AV}{M}\right)t} \end{aligned}$$

# 1. Análisis dimensional

1. Considere una serie de pasajes geoméricamente similares de sección circular como se muestra en la figura. Un cambio en cualquier dimensión de longitud produce cambios proporcionales en todas las demás longitudes.



En el caso  $I$ , un fluido de baja viscosidad fluye a través de un pasaje de manera tal que las tensiones viscosas sobre cualquier partícula son despreciables comparadas con las tensiones de inercia. Son considerados pasajes de diferente tamaño, todos con el mismo fluido incompresible entrando al conducto con la misma velocidad  $V_1$ . Para el caso  $I$  (fluido no viscoso) cuando  $D_1$  aumenta, indicar qué ocurre con las siguientes magnitudes (aumenta, permanece igual, disminuye):

- a)  $V_2$
- b) El caudal volumétrico.
- c) El valor de  $\frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2}$
- d) El valor de  $p_1 - p_2$
- e) El caudal másico por unidad de sección transversal en la sección 2.

*Respuesta:*

- a) Puesto que el fluido es incompresible, su densidad es constante. Por conservación de la masa, y considerando estado estacionario, el caudal entrante debe ser igual al caudal saliente:  $\rho V_1 \frac{\pi}{4} D_1^2 = \rho V_2 \frac{\pi}{4} D_2^2$ , de donde  $V_2 = \frac{D_1}{D_2} V_1$ . Si la relación de diámetros permanece constante y  $V_1$  también, entonces  $V_2$  no cambiará.
- b) El caudal volumétrico es:  $Q = V_1 \frac{\pi}{4} D_1^2$ , con  $V_1$  constante, un aumento de  $D_1$  lleva a un aumento en  $Q$ .
- c) Dado el diámetro  $D_1$  de entrada, la geometría del pasaje queda completamente definida. Sabiendo además las características del fluido (densidad  $\rho$ , viscosidad  $\mu$ ) y la velocidad de entrada  $V_1$ , debe ser posible calcular la caída de presión  $p_1 - p_2$ . Esto se puede expresar como: “debe existir una relación funcional  $g(D_1, \rho, \mu, V_1, p_1 - p_2) = 0$ ”. Si además las tensiones viscosas son despreciables, la viscosidad no influye en el resultado, podemos escribir  $\hat{g}(D_1, \rho, V_1, p_1 - p_2) = 0$  Utilizando el Teorema  $\pi$  de Buckingham para simplificar, se puede obtener un único número adimensional, por ejemplo:  $\frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2}$  que debe ser constante.

- d) Si además  $V_1$  permanece constante, el valor de  $p_1 - p_2$  permanecerá constante.
- e) El caudal másico por unidad de sección transversal en la sección 2 se puede escribir como:

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \frac{\rho V_2 A_2}{A_2} = \rho V_2$$

Ya vimos que  $V_2$  se mantenía constante, y  $\rho$  también, entonces  $\frac{\dot{m}}{A_2}$  se mantendrá constante.

En el caso *II*, un fluido de alta viscosidad fluye a través del pasaje tan lentamente que las tensiones de inercia sobre cualquier partícula de fluido son despreciables comparadas con las tensiones viscosas. Son considerados pasajes de diferentes tamaños, todos con el mismo fluido incompresible entrando al conducto con la misma velocidad  $V_1$ . Para el caso *II* (fluido altamente viscoso) cuando  $D_1$  aumenta, indicar qué ocurre con las siguientes magnitudes (aumenta, permanece igual, disminuye):

- a)  $V_2$
- b) El caudal másico.
- c) El valor de  $\frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2}$
- d) El valor de  $p_1 - p_2$
- e) El valor de  $(p_1 - p_2)D_1$
- f) El Re en la sección 2.
- g) la tensión de corte en la pared, a medio camino entre la sección 1 y la 2
- h) la fuerza total ejercida por el fluido sobre las paredes en la dirección del flujo.

*Respuesta:*

- a)  $V_2$ , por las mismas consideraciones que en el caso anterior, permanecerá constante.
- b) El caudal másico  $\dot{m}$  es el caudal volumétrico  $Q$  multiplicado por la densidad, que permanece constante. Por lo tanto  $\dot{m}$  se comportará de la misma forma que  $Q$ , es decir: aumentará, por las mismas consideraciones que en el caso *I*.
- c) Repitiendo el razonamiento del caso anterior, obtenemos la expresión  $g(D_1, \rho, \mu, V_1, p_1 - p_2) = 0$ . Pero ahora, en lugar de despreciar el efecto de la viscosidad, lo que sucede es que el término de las fuerzas de inercia en las ecuaciones de Navier-Stokes se hace despreciable frente al resto, y es la densidad  $\rho$  la que no tendrá influencia en el resultado. Se puede plantear entonces que existe una relación que permite obtener  $p_1 - p_2$  a partir sólo de  $D_1$ ,  $\mu$  y  $V_1$ :  $\hat{g}(D_1, \mu, V_1, p_1 - p_2) = 0$ . Usando nuevamente

el teorema  $\pi$  de Buckingham, aparece un sólo número adimensional que debe ser una constante, por ejemplo:

$$\frac{(p_1 - p_2)D_1}{\mu V_1} = cte.$$

operando:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2} = cte. \frac{\mu}{D_1 \rho V_1}$$

De donde resulta que al mantener constantes  $\mu$ ,  $\rho$  y  $V_1$ , un aumento en  $D_1$  produce una disminución de  $\frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2}$ .

- d) Operando sobre la fórmula anterior se obtiene que también el valor de  $p_1 - p_2$  disminuye al aumentar  $D_1$  y mantener constantes  $\rho$ ,  $\mu$  y  $V_1$ .
- e) En cambio el producto  $(p_1 - p_2)D_1$  se puede expresar como:

$$(p_1 - p_2)D_1 = cte. \mu V_1$$

y permanece constante.

- f) El Re en la sección 2 es:

$$Re_2 = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu}$$

Lo único que varía en la expresión es  $D_2$  que aumenta proporcionalmente con  $D_1$ .

- g) La tensión de corte en la pared, en cualquier punto, podrá ser obtenida a partir de los datos del problema, es decir, habrá una relación:  $g(D_1, \rho, \mu, V_1, \tau) = 0$ . Despreciando el efecto de la densidad y aplicando análisis dimensional aparece el número:

$$\frac{\tau D_1}{\mu V_1} = cte.$$

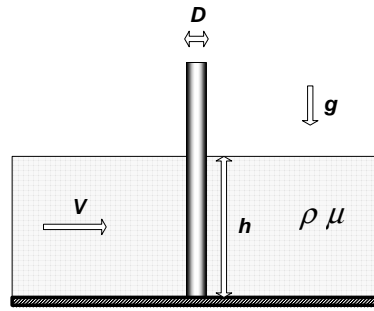
(Observación: la tensión tiene las mismas unidades que la caída de presión, entonces podemos usar la fracción  $\frac{\mu V_1}{D_1}$  para “medirla”). Por lo tanto, al aumentar  $D_1$  y mantener  $\mu$  y  $V_1$ , la tensión de corte en cualquier punto va a disminuir.

- h) Llamemos  $F$  a la fuerza total ejercida por el fluido sobre las paredes en la dirección del flujo. Esta fuerza también deberá poder obtenerse a partir de  $D_1$ ,  $\mu$  y  $V_1$ . El número adimensional que aparece es:

$$\frac{F}{\mu V_1 D_1} = cte.$$

Entonces, si  $\mu$  y  $V_1$  permanecen constantes,  $F$  aumenta proporcionalmente con  $D_1$ .

2. Se pretende estudiar un sistema formado por un canal abierto que posee un pilote vertical apoyado en el fondo del canal como lo indica la figura. Para esto se decide realizar un experimento de laboratorio utilizando una escala 1:10.



- a) Si se desea respetar la semejanza dimensional del problema, indique las condiciones que se deben cumplir para la elección de los parámetros utilizados en el experimento. En este caso: ¿Cómo relacionaría una frecuencia característica medida en el experimento con la que aparecería en el sistema real?
- b) Debido a que la relación  $\frac{h}{D}$  es muy grande en el canal real, resulta muy difícil respetar esta condición en el experimento. En particular, en el caso real  $\frac{h}{D} = 30$ , mientras que en el experimento esta relación se tomó igual a 20. Si se desea obtener una estimación de la fuerza de arrastre ejercida sobre el pilote en el caso real, qué parámetros elegiría y cómo utilizaría los datos obtenidos en el experimento para realizar esta estimación?

*Respuesta:*

- a) En este caso aparecen seis parámetros que definen nuestro problema, a saber:  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $V$ ,  $h$  y  $D$ . Utilizando análisis dimensional para estos parámetros resultan tres números adimensionales que pueden elegirse de la siguiente manera:

$$\text{Re} = \frac{V\rho D}{\mu} \quad \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad \text{Form} = \frac{D}{h}$$

Estos números deberían respetarse en el experimento. El tercero de ellos se mantiene puesto que se trata de un modelo *a escala*. La igualdad de Fr impone:

$$\text{Fr}_p = \frac{V_p}{\sqrt{gh_p}} = \text{Fr}_m = \frac{V_m}{\sqrt{gh_m}}$$

Teniendo en cuenta que  $g$  es la misma en ambos casos y que  $10h_m = h_p$ , resulta  $V_p = \sqrt{10}V_m$ .

Para conservar el número de Reynolds:

$$\text{Re}_m = \frac{V_m D_m}{\nu_m} = \text{Re}_p = \frac{V_p D_p}{\nu_p}$$

Teniendo en cuenta que,  $10D_m = D_p$ , y utilizando el resultado anterior para la velocidad del modelo, obtenemos:

$$\frac{\nu_p}{\nu_m} = 10^{\frac{3}{2}}$$

(la relación  $\mu/\rho$  debería ser unas 30 veces menor en el modelo que en el caso real).

Para obtener el valor de una frecuencia característica en el caso real a partir de la frecuencia medida en el modelo, se deben igualar las frecuencias adimensionales. Utilicemos como escala de frecuencias la relación  $V/D$ :

$$F = \frac{F_m D_m}{V_m} = \frac{F_p D_p}{V_p} \Rightarrow F_p = F_m \frac{D_m}{D_p} \frac{V_p}{V_m} = \frac{F_m}{\sqrt{10}}$$

- b) Podemos suponer que en la fuerza de arrastre sobre el pilote influyen dos efectos: el arrastre por presión y fricción debido a la corriente en que está inmerso, y el efecto de la superficie libre. Este último efecto se supone que estará restringido a una zona de tamaño proporcional al diámetro del pilote. Por otra parte, el primero será proporcional a la dimensión  $h$ , de modo que cuando  $h \gg D$  el efecto de la superficie se vuelve poco significativo. En estas condiciones, cuando el efecto predominante es el arrastre de la corriente, el número adimensional a conservar es el Re:

$$\text{Re} = \frac{V_p D_p}{\nu_p} = \frac{V_m D_m}{\nu_m}$$

Y la escala de fuerzas apropiada en este caso es:

$$F = \rho V^2 D h f(\text{Re})$$

Suponiendo que se mantiene la escala 1:10 en el diámetro, tenemos las relaciones:

$$D_m = \frac{D_p}{10}, \quad h_m = \frac{h_p}{10} \frac{20}{30}$$

y suponiendo que usamos el mismo líquido, para conservar el Re debemos hacer:

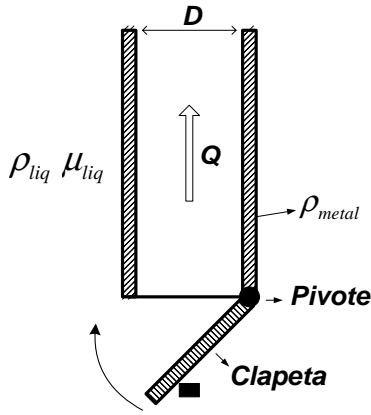
$$V_m = D_p V_p / D_m = 10 V_p$$

La fuerza en el pilote real puede obtenerse de la medida en el modelo utilizando la relación:

$$\frac{F_p}{\rho V_p^2 D_p h_p} = \frac{F_m}{\rho V_m^2 D_m h_m}$$

$$F_P = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 \frac{D_p}{D_m} \frac{h_p}{h_m} F_m = 0,01 \times 10 \times 15 F_m = 1,5 F_m$$

- Se pretende estudiar el funcionamiento de una válvula de retención ubicada al final de una tubería que se encuentra completamente sumergida (como se muestra en la figura). Para esto se decide realizar un experimento de laboratorio utilizando una escala 1:10.



a) Si se desea respetar la semejanza dimensional del problema completo, indique que condiciones se deben cumplir para la elección de las variables utilizadas en el experimento. En este caso: ¿Cómo relacionaría un tiempo de cerrado de la válvula medido en el experimento con el que aparecería en el sistema real?

b) En este punto sólo estamos interesados en averiguar el caudal de succión para el cual la clapeta comienza a cerrarse, es decir, el caudal para el cual la clapeta se encuentra completamente abierta pero la fuerza sobre el soporte que sostiene la clapeta es cero. En este caso, para conservar la semejanza dimensional en el modelo la cantidad de numeros adimensionales a ser conservados disminuye y por lo tanto puede utilizarse el mismo fluido que en el prototipo. Explique porqué esto es cierto, e indique como se relaciona el caudal medido en el modelo para este punto con el caudal que se obtendrá en el prototipo.

*Considerar las superficies de la tubería y de la clapeta como perfectamente lisas en todos los casos.*

*Respuesta*

a) Los parámetros del problema completo son:  $\rho_{Liq}$ ,  $\mu_{Liq}$ ,  $D$ ,  $Q$ ,  $\rho_{Metal}$  y  $g$ . Haciendo uso del análisis dimensional encontramos que podemos formar tres grupos adimensionales. Una forma posible de agrupar estos parámetros en tres números adimensionales es como sigue:

$$\frac{\rho_{Liq}}{\rho_{Metal}} \quad \frac{Q^2}{D^5 g} \quad \frac{Q \cdot \rho_{Liq}}{D \cdot \mu_{Liq}}$$

La conservación del primer numero adimensional requiere utilizar una relación de densidades entre el metal de la tubería y el líquido que sea la misma en el modelo y en el prototipo.

A partir del segundo número adimensional y teniendo en cuenta que  $D_m = \frac{D_p}{10}$ , obtenemos la siguiente relación para los caudales (utilizando un mismo valor de  $g$ ):

$$Q_m = \frac{Q_p}{10^{\frac{5}{2}}}$$

Por último, utilizando el tercer número adimensional y las condiciones para  $D_m$  y  $Q_m$  obtenemos para  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ :

$$\nu_m = \frac{\nu_p}{10^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto debemos utilizar un fluido que posea una viscosidad cinemática unas 31 veces menor que el utilizado en el prototipo.

Para relacionar un tiempo medido en el modelo con el esperado en el prototipo usamos el hecho de que si mantenemos la semejanza dinámica y geométrica, los tiempos adimensionalizados serán iguales. Podemos adimensionalizar el tiempo con  $Q$  y  $D$  de la siguiente manera:

$$\frac{T_m Q_m}{D_m^3} = \frac{T_p Q_p}{D_p^3}$$

Utilizando las relaciones  $\frac{Q_m}{Q_p}$  y  $\frac{D_m}{D_p}$  que obtuvimos antes, resulta:

$$T_p = T_m \sqrt{10}$$

- b) Si sólo estamos interesados en el caudal para el cual la la clapeta comienza a levantarse, vemos que la dinámica de la clapeta no es importante (se encuentra siempre en reposo) y por lo tanto la densidad del material con el cual está construida no es un parámetro independiente. En este caso la densidad de la clapeta y la gravedad no serán parámetros independientes. El parámetro importante aquí será el peso de la clapeta que se puede calcular a partir de  $(\rho_{metal} - \rho_{Líquido})g = \Delta\rho \cdot g$ . De esta manera los números adimensionales se reducen a dos que pueden elegirse de la siguiente manera:

$$\frac{Q^2 \cdot \rho_{Liq}}{D^5 \Delta\rho \cdot g} \quad \frac{Q \cdot \rho_{Liq}}{D \cdot \mu_{Liq}}$$

Utilizando el segundo número adimensional y conservando el mismo líquido en el modelo y en el prototipo, obtenemos:

$$Q_m = \frac{Q_p}{10}$$

Usando el primer número adimensional (utilizando el mismo fluido) obtenemos:

$$\frac{Q_m^2}{D_m^5 \Delta\rho_m \cdot g} = \frac{Q_p^2}{D_p^5 \Delta\rho_p \cdot g}$$

Y utilizando las condiciones ahalladas para  $Q$  y la relación de escala para  $D$  obtenemos:

$$\Delta\rho_m = \Delta\rho_p \cdot 10^{\frac{5}{2}}$$

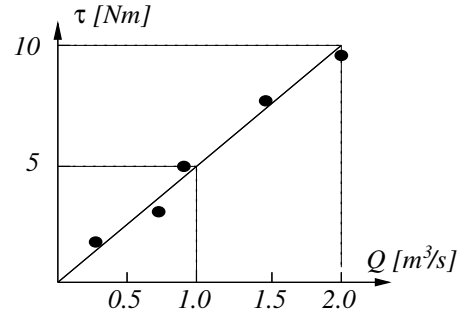
De esta manera se puede encontrar una semejanza dinámica sin cambiar de fluido pero autilizando una diferencia de densidades diferentes.

Por último, el caudal medido en el modelo para esta condición será diez veces menor que el que se obtendría en el prototipo.

4. El torque  $\tau$  de una turbina de flujo axial es una función de la densidad del fluido  $\rho$ , el diámetro del rotor  $D$ , la velocidad angular de rotación  $\Omega$  y el caudal

volumétrico  $Q$  (en el régimen de trabajo usual la viscosidad del fluido no tiene una influencia significativa).

En un experimento con una turbina de diámetro  $D = 0,5m$  en agua ( $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ ), con una velocidad de rotación  $\Omega = 100$  rpm constante, se midió el torque en el eje en función del caudal  $Q$ , resultando el gráfico de la figura.



- En base a los resultados del experimento, escriba una expresión para calcular el torque en función de los parámetros relevantes del problema.
- Calcular cuál sería el torque en una turbina geoméricamente semejante a la del experimento, en agua, si el diámetro del rotor es  $1m$ , y el caudal es de  $3 \frac{m^3}{s}$  cuando la velocidad angular es de  $30$  rpm.
- Manteniendo el caudal, la velocidad angular y el tamaño de la turbina, ¿cómo cambia la diferencia de presiones entre la entrada y la salida, al variar la densidad del fluido circulante?

*Respuesta:*

- Dada la expresión dimensional:  $f(\tau, \rho, D, \Omega, Q)$ , planteamos la matriz dimensional:

	$\tau$	$\rho$	$D$	$\Omega$	$Q$
M	1	1	0	0	0
L	2	-3	1	0	3
T	-2	0	0	-1	-1

Eligiendo las columnas de  $\rho$ ,  $D$  y  $\Omega$ , que son linealmente independientes y según el teorema  $\pi$  de Buckingham, vamos a poder escribir dos números adimensionales. Nos conviene que en uno de ellos aparezca  $\tau$  y en el otro  $Q$ . Escribiéndolos como:  $\pi_1 = \tau \rho^a D^b \Omega^c$  y  $\pi_2 = Q \rho^d D^e \Omega^f$ , los valores de  $a, b, c, d, e, f$  que hacen adimensionales a  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son:  $a = -1$ ,  $b = -5$ ,  $c = -2$ ,  $d = 0$ ,  $e = -3$  y  $f = -1$ , y los números son:

$$\pi_1 = \frac{\tau}{\rho D^5 \Omega^2}, \quad \pi_2 = \frac{Q}{D^3 \Omega}$$

En el gráfico se observa que la relación entre  $\tau$  y  $Q$  se puede escribir -aproximadamente- como:  $\tau = 5 \frac{Kg}{m \cdot s} Q$ . Entonces la función adimensional que relaciona  $\pi_1$  y  $\pi_2$  debe ser también lineal:

$$\pi_1 = \frac{\tau}{\rho D^5 \Omega^2} = k \pi_2 = \frac{Q}{D^3 \Omega}$$

O sea:

$$\tau = k \frac{\rho D^5 \Omega^2}{D^3 \Omega} Q = k \rho D^2 \Omega Q$$

Pero:  $k\rho D^2\Omega = 5\frac{Kg}{m\cdot s}$ , despejando  $k$  y reemplazando los valores de  $\rho$ ,  $D$  y  $\Omega$  del experimento, se obtiene:

$$k = 5 \frac{Kg}{m\cdot s} \frac{m^3}{1000Kg} \frac{1}{0,5^2m^2} \frac{60s}{100} \frac{1}{2\pi} = 0,0019$$

$$\tau = 0,0019\rho D^2\Omega Q$$

Con la velocidad angular en radianes por unidad de tiempo.

b) Reemplazando valores en la fórmula anterior:

$$\tau = 0,0019 \cdot 1000 \frac{Kg}{m^3} (1m)^2 \frac{30}{60s} \frac{2\pi}{s} \frac{m^3}{s} = 18Nm$$

c) Para obtener un número adimensional que involucre una diferencia de presiones, se puede plantear:  $\pi_3 = \Delta p \rho^a D^b \Omega^c$ . Operando, se obtiene:  $\pi_3 = \frac{\Delta p}{\rho \Omega^2 D^2}$ , y este número adimensional será función de  $\pi_2$ , manteniéndose  $\Omega$ ,  $D$  y  $Q$ , se mantiene  $\pi_2$ , también  $\pi_3$ , y entonces la diferencia de presiones es lineal con  $\rho$ .